

I- OSCILLATIONS LIBRES DES SYSTEMES A UN DEGRE DE LIBERTE

- THEMES:
- Différents régimes d'oscillation
 - Résistance critique
 - Décrément logarithmique
 - Facteur de qualité

I. Étude d'un système mécanique à un degré de liberté:

1. Les différents régimes d'oscillations:

La figure I-1 représente le système mécanique à un degré de liberté le plus simple :

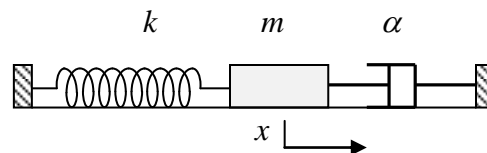


Figure I-1

Le déplacement de la masse m par rapport à sa position d'équilibre, appelé élongation, est noté x . La constante de raideur du ressort est k . Le coefficient de l'amortissement, supposé visqueux, est α . On donne à la masse une élongation initiale donnée X_0 (et/ou une vitesse initiale V_0) puis on abandonne le système à lui-même. C'est le régime libre.

Le déplacement de m obéit à l'équation différentielle suivante:

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0$$

qui peut être mise sous la forme normalisée

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{1}$$

en posant : $\delta = \frac{\alpha}{2m}$: facteur d'amortissement

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} : \text{pulsation propre du système}$$

Plus généralement, l'évolution dans le temps de tout système libre à un degré de liberté peut être ramenée à une équation du même type que (1). La résolution de cette équation s'effectue en cherchant des solutions de la forme $Ae^{rt} P_n(t)$ où r est un complexe et $P_n(t)$ un polynôme de degré n . On montre que, sauf dans le cas où $r = -\delta$ (racines doubles), le polynôme $P_n(t)$ se réduit à une constante. En remplaçant x par Ae^{rt} dans l'équation (1), on obtient l'équation caractéristique :

$$r^2 + 2\delta r + \omega_0^2 = 0$$

dont la résolution permet de déduire :

$$r_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

La solution sera donc une combinaison des deux racines

$$x(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$$

Trois cas sont envisageables selon le signe du discriminant

$$\Delta' = \delta^2 - \omega_0^2$$

1^{er} cas: $\Delta' > 0 \Leftrightarrow \delta > \omega_0$

Les racines r_1 et r_2 sont alors réelles et négatives. La solution est une combinaison de deux exponentielles décroissantes. L'élongation diminue au cours du temps pour s'annuler au bout d'un temps suffisant long. C'est le régime dit "**apériodique**". Il correspond à un coefficient de frottement élevé.

2^{ème} cas: $\Delta' = 0 \Leftrightarrow \delta = \omega_0$

On obtient deux racines égales $r_1 = r_2 = -\delta$. Dans ce cas, la solution s'écrit prend la forme suivante:

$$x(t) = (at + b)e^{-\delta t}$$

Elle correspond au régime dit "**critique**" dans lequel le système retourne à sa position d'équilibre le plus rapidement possible sans la dépasser, c'est à dire sans oscillation. L'amortissement critique est donné par :

$$\alpha_c = 2\sqrt{mk}$$

3^{ème} cas: $\Delta' < 0 \Leftrightarrow \delta < \omega_0$

Les racines r_1 et r_2 sont, dans ce cas, complexes:

$$r_{1,2} = -\delta \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \quad \text{avec } j^2 = -1$$

et la solution devient :

$$x(t) = e^{-\delta t} (Ae^{j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} t} + Be^{-j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} t})$$

Le terme entre parenthèses étant une combinaison de deux sinusoides de même fréquence, il peut lui même s'écrire sous la forme d'une sinusoïde:

$$x(t) = Ce^{-\delta t} \cos(\omega_a t + \varphi)$$

avec $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ pseudo-pulsation

C'est l'expression d'une sinusoïde dont l'amplitude décroît exponentiellement avec le temps. C'est le régime oscillatoire ou "**pseudo-périodique**". Il correspond à un amortissement faible.

Les trois régimes possibles sont résumés sur la figure I-2.

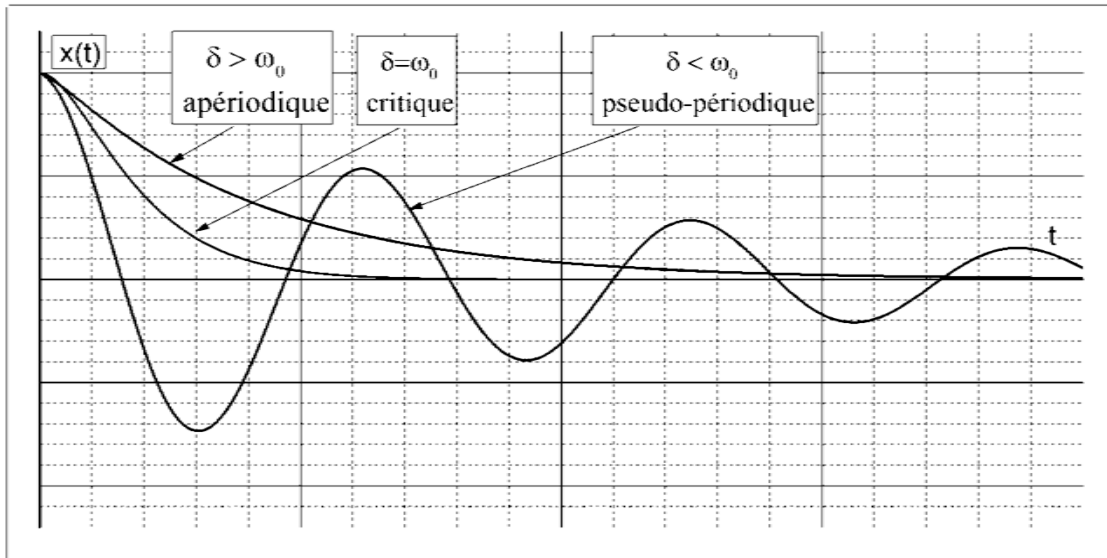


Figure I-2

2. Le régime pseudo-périodique

Si on suppose que le système est libéré sans vitesse à partir d'une élongation initiale X_0 , montrer que la solution s'écrit

$$x(t) = X_0 \frac{\omega_0}{\omega_a} e^{-\delta t} \cos(\omega_a t + \varphi) \quad \text{avec} \quad \cos \varphi = \frac{\omega_a}{\omega_0}$$

Si l'amortissement est faible, $\delta \ll \omega_0$ et donc $\omega_a \cong \omega_0$. On a :

$$x(t) = X_0 e^{-\delta t} \cos(\omega_0 t)$$

Le rapport $D = \frac{1}{n} \text{Log} \frac{x(t)}{x(t+nT)}$, où $T = \frac{2\pi}{\omega_a}$ est la période, est appelé décroissement logarithmique et peut s'écrire également $D = \delta T$

Il caractérise le degré d'amortissement. Plus l'amortissement est faible et plus D est petit devant 2π . Une autre grandeur permet de définir le degré d'amortissement. C'est le facteur de qualité du système. Cette grandeur, appelée Q , d'un usage plus général que le décroissement D , est définie par :

$$Q = \frac{2\pi}{(1 - e^{-2\delta T})}$$

expression qui devient, dans le cas d'un amortissement faible,

$$Q = \frac{\omega_a}{2\delta} = \frac{\pi}{D}$$

Un grand facteur de qualité signifie que le système est peu amorti.

II. Etude d'un circuit électrique oscillant

Considérons, à présent, le circuit électrique RLC de la figure I-3.

Le condensateur étant au préalable chargé, on ferme le circuit. L'évolution de l'intensité i du courant électrique est décrite par la loi d'Ohm

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{c} \int idt = 0$$

En introduisant la charge électrique $q(t)$ du condensateur, on a

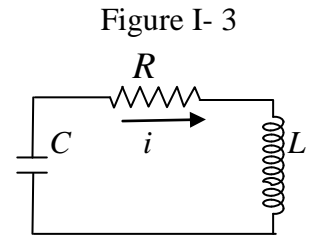
$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{c} = 0$$

et, en posant $\delta = \frac{R}{2L}$ et $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$,

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

Cette équation est analogue à l'équation (1). Sa solution peut être, selon la valeur donnée à R (si L est constante), apériodique, critique ou oscillatoire. Les résultats obtenus précédemment pour le système mécanique sont également valables ici.

L'observation de la charge $q(t)$ du condensateur ou, ce qui revient au même, de la tension à ses bornes $v(t) = \frac{q(t)}{c}$, qui lui est proportionnelle, nous renseignera donc sur toutes les propriétés des systèmes à un degré de liberté. Cela est d'autant plus intéressant que les circuits électriques sont beaucoup plus simples à réaliser que les systèmes mécaniques.



III. Réalisation pratique

Le dispositif étudié est un circuit RLC série constitué d'une résistance variable (boîtes à décades $\times 1000$, $\times 100$, $\times 10 \Omega$), d'une bobine d'induction inconnue L et d'un condensateur de capacité C dont la valeur sera donnée en séance de TP.

Le circuit est alimenté par un signal carré $e(t)$ délivré par un générateur de fonctions (GBF) et de fréquence suffisamment faible devant la fréquence propre du système. Cela permet d'observer le régime libre du système. En effet, soit e_0 l'amplitude du signal carré. On a ainsi $e(t) = +e_0$ pendant une demi-période et $e(t) = -e_0$ pendant la demi-période suivante,. La charge q aux bornes du condensateur obéit alors à l'équation

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{c} = \pm e_0$$

En posant $Q = q \pm Ce_0$, on a

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{Q}{c} = 0$$

soit :

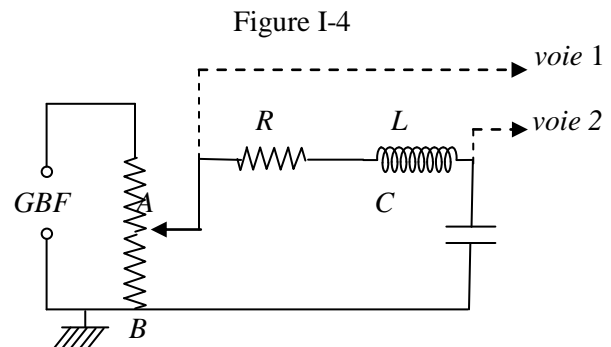
$$\ddot{Q} + 2\delta\dot{Q} + \omega_0^2 Q = 0$$

qui représente bien le mouvement libre du système. La solution $Q(t)$ tendant asymptotiquement vers 0, la charge $q(t)$ tendra vers la valeur $\pm Ce_0$.

Remarque : Certains types de GBF délivrent un signal carré non alternatif, c'est à dire que $e(t)$ est égal à e_0 pendant une demi-période et à 0 pendant la demi-période suivante. Les équations ci-dessus doivent donc être modifiées en conséquence.

1. Dispositif expérimental (figure I-4)

Le générateur de fonctions (GBF) possédant une résistance interne non négligeable (généralement de 50Ω), on utilise un pont diviseur permettant d'obtenir entre les points A et B, un générateur de faible résistance interne.



Le signal V_{AB} délivré entre A et B est observé sur la voie Y_1 de l'oscilloscope.

2. Observation des différent régimes

La tension $V_C(t)$ aux bornes de C est envoyée sur la voie Y_2 de l'oscilloscope. Observer l'évolution de la forme de $V_C(t)$ quand on fait varier la résistance d'une grande à une petite valeur. Comparer la valeur asymptotique de $V_C(t)$ à la valeur prévue.

Mesurer la résistance critique R_C , valeur de R pour laquelle on obtient le régime critique, c'est-à-dire celle pour laquelle on passe du régime oscillant au régime apériodique. Une valeur précise est généralement impossible. On proposera donc la fourchette la plus étroite possible pour R_C . En déduire une valeur de l'inductance L de la bobine.

3. Le régime oscillatoire amorti

La résistance R étant fixée à zéro, l'amortissement est assuré par les autres résistances présentes dans le circuit (générateur, bobine, connexions, contacts).

Mesurer le décrément logarithmique D ainsi que la période T des oscillations avec le maximum de précision. En déduire le facteur d'amortissement δ , le facteur de qualité Q , la valeur de l'inductance L et celle de la somme des résistances présentes dans le circuit avec les incertitudes correspondantes. Comparer L à la valeur obtenue à partir de la mesure de R_C .

4. Application à la mesure de résistances et de capacités inconnues

Remplacer la résistance variable AOIP par la résistance R_X et le condensateur C par la capacité C_X . Étudier de nouveau le régime pseudo-périodique obtenu. En utilisant les résultats précédents, en déduire les valeurs de R_X et C_X avec les incertitudes correspondantes.

