

II-OSCILLATIONS FORCEES DES SYSTEMES A UN DEGRE DE LIBERTE

- THEMES:
- Courbe de résonance
 - Etude du déphasage de la réponse
 - Bande passante et facteur de qualité

I. Réponse du système mécanique à une excitation extérieure

1. Régime transitoire. Régime permanent

Lorsque la masse m est soumise à une force extérieure $F(t)$ de même direction que l'élongation x , l'équation (1) devient

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m} = E(t) \quad (2)$$

On sait que la solution générale de cette forme d'équation est la superposition de la solution libre $x_T(t)$ (équation sans second membre ou homogène) et d'une solution particulière $x_P(t)$ choisie en fonction de la forme du second membre $E(t)$.

La solution $x_T(t)$, déjà obtenue dans l'étude des oscillations libres, correspond au "**régime transitoire**". En régime pseudo-périodique, elle s'écrit

$$x(t) = X_0 \frac{\omega_0}{\omega_a} e^{-\delta t} \cos(\omega_a t + \varphi)$$

avec $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ et $\cos \varphi = \frac{\omega_a}{\omega_0}$

et pour des conditions initiales telles que :

$$x_T(0) = X_0 \text{ et } \dot{x}_T = 0$$

Au bout d'un temps suffisamment long (quelques δ^{-1}), x_T devient très faible et la solution générale tend vers la solution particulière $x_P(t)$. Il s'établit alors ce qui est appelé "**régime permanent**".

On s'intéressera au cours de cette partie au seul régime permanent, plus particulièrement dans le cas d'une excitation $E(t)$ sinusoïdale de pulsation ω telle que:

$$E(t) = E_0 e^{j\omega t} = \frac{F_0}{m} e^{j\omega t}$$

2. Etude du régime permanent

Le régime permanent est alors sinusoïdal de même pulsation que l'excitation et la réponse du système s'écrit :

$$x(t) = A_0(\omega) e^{j(\omega t + \varphi)}$$

où $A_0(\omega)$ est l'amplitude qui dépend de la pulsation ω et φ le déphasage de la réponse par rapport à l'excitation.

Montrer qu'on a :

$$A_0(\omega) = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}}$$

$$\text{tg}(\varphi) = \frac{-2\delta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

La courbe donnant la variation de l'amplitude en fonction de ω est représentée sur la figure II-1.

L'amplitude A_0 passe par un maximum $(A_0)_{\max}$ pour une pulsation $\omega = \omega_R$. C'est le phénomène de résonance. La pulsation $\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$ est la pulsation de résonance.

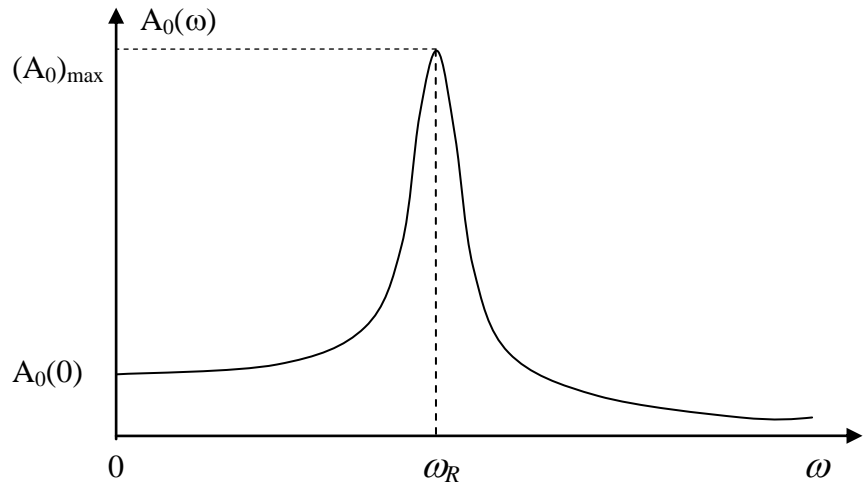


Figure II- 1

3. Acuité de la résonance. Bande passante

Le phénomène de résonance est d'autant plus prononcé que l'amortissement est faible. On peut caractériser l'acuité de la résonance par la largeur $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ où ω_1 et ω_2 sont les pulsations pour lesquelles l'amplitude de la réponse est égale à $\frac{(A_0)_{\max}}{\sqrt{2}}$. C'est la largeur ou la **bande passante** à **-3 dB**.

Montrer que, lorsque l'amortissement est faible, on a les relations utiles suivantes :

$$Q = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{1}{\alpha} \sqrt{mk} = \frac{m\omega_0}{\alpha}$$

II. Etude d'un circuit RLC forcé

Les résultats précédents peuvent être appliqués au circuit électrique ci-contre (Figure II-2), dans lequel $e(t)$ est un signal sinusoïdal $e_0 e^{j\omega t}$.

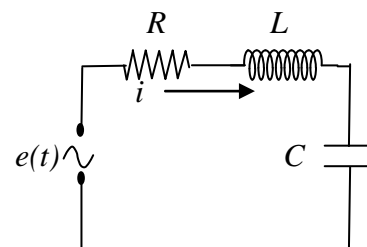


Figure II-2

L'équation différentielle décrivant l'évolution de la charge $q(t)$ devient :

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = E_0 e^{j\omega t}$$

en posant : $\delta = \frac{R}{2L}$, $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ et $E_0 = \frac{e_0}{L}$

La réponse du circuit en régime permanent est alors donnée par

$$q(t) = Q_0(\omega) e^{j(\omega t + \varphi)}$$

où
$$Q_0(\omega) = \frac{\frac{e_0}{L}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}}$$

et
$$tg(\varphi) = \frac{-2\delta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

1. Etude de l'amplitude

La tension $V_c(t)$ aux bornes du condensateur et le courant $i(t)$ dans le circuit auront pour amplitudes respectives:

$$V_0(\omega) = \frac{e_0 \omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}}$$

$$I_0(\omega) = \frac{e_0 \omega}{L \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}}$$

Etablir la relation : $(V_0)_{max} = e_0 \frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$ où Q est le facteur de qualité du circuit.

Montrer que, pour $\omega = \omega_0$, on a $V_0 = Q e_0$

Cette dernière relation signifie que lorsque la pulsation de l'excitation est égale à la pulsation propre ω_0 du circuit, la réponse aux bornes du condensateur est égale à l'excitation amplifiée d'un facteur Q . C'est pour cette raison que le coefficient Q est souvent appelé « facteur de surtension ». On peut ainsi compléter la série de relations utiles permettant la mesure de Q :

$$Q = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{V_0(\omega_0)}{e_0} = \frac{R_C}{2R}$$

Où R_C est la résistance critique (voir manipulation précédente, « oscillations libres »)

2. Etude de déphasage.

L'angle φ représente le déphasage de la réponse en tension aux bornes du condensateur (ou du déplacement pour le système mécanique) par rapport à l'excitation $e(t)$.

Il est toujours négatif, ce qui signifie que la réponse est en retard par rapport à l'excitation. On obtient la variation suivante pour le déphasage φ correspondant à un amortissement δ donné (figure II-3).

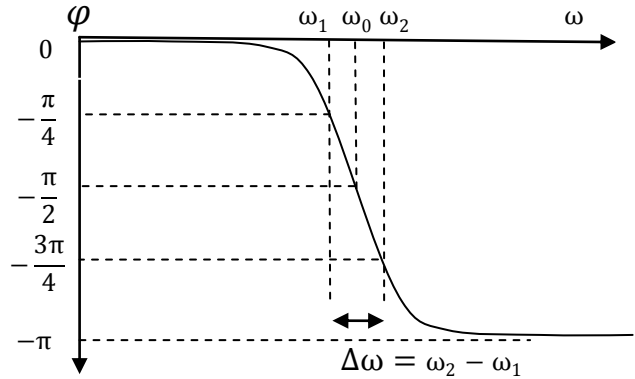


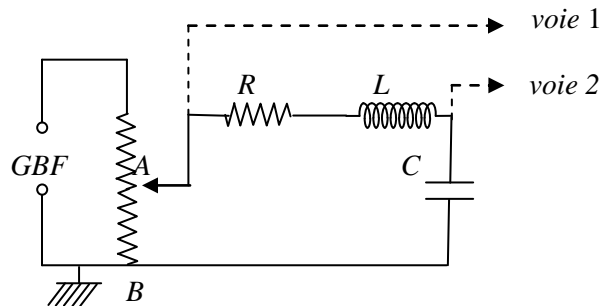
Figure II-3

Montrer que l'écart entre les deux pulsations ω_1 et ω_2 pour lesquelles φ est égal respectivement à $-\pi/4$ et $-3\pi/4$ est égal à la bande passante $\Delta\omega$.

III. Réalisation pratique

1. Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental est identique à celui qui a été utilisé dans la partie "Oscillations libres", le GBF délivrant cette fois-ci un signal sinusoïdal. La fréquence du signal peut être mesurée à l'aide d'un fréquencemètre, à l'oscilloscope ou lue directement sur l'afficheur du GBF.



2. Observation du phénomène de résonance de tension.

La résistance R étant fixée à 0 , le signal d'entrée $e(t)$ est envoyé sur la voie Y_1 de l'oscilloscope et la tension aux bornes du condensateur C sur la voie Y_2 . Ajuster l'amplitude de $e(t)$. Faire varier la fréquence du signal d'entrée depuis les basses fréquences jusqu'à la zone des fréquences élevées et observer simultanément la variation des amplitudes des deux signaux. Relever la fréquence de résonance F_R et comparer à la pulsation propre du circuit F_0 .

Fixer R à 100Ω et effectuer les mêmes opérations. Comparer avec les observations précédentes et interpréter.

3. Etude de la réponse du système (Amplitude et phase)

On se propose de tracer les courbes donnant l'amplitude et la phase de la tension aux bornes de C en fonction de la fréquence du signal d'entrée, $e(t)$ et cela, pour deux amortissements différents ($R=0$ et $R=100\Omega$)

Faire varier la fréquence du signal entre 0 et $2F_0$ environ, en resserrant les intervalles au voisinage de la résonance. Relever à l'oscilloscope l'amplitude de la réponse aux bornes de C ainsi que son déphasage par rapport à $e(t)$. Veiller à ce que l'amplitude du signal d'entrée $e(t)$ reste constante en la réajustant si nécessaire.

Remarque: Pour la mesure simultanée du déphasage et de l'amplitude, il sera plus pratique d'utiliser le décalage entre les deux sinusoïdes $V_c(t)$ et $e(t)$ plutôt que la méthode de l'ellipse. Le principe de ces deux méthodes de mesure a été donné en manipulation d'introduction.

Tracer sur le même repère, en fonction de la fréquence, les variations de l'amplitude de $V_c(t)$ [ou de $\frac{v_c(t)}{e_0}$] obtenues pour $R=0$ et $R=100\Omega$.

Tracer sur un autre repère, en fonction de la fréquence, les variations du déphasage φ obtenues pour $R=0$ et $R=100\Omega$.

4. Etude de l'acuité de la résonance

Calculer, à partir des courbes d'amplitude et de déphasage, la bande passante à -3 dB pour chacune des deux résistances et en déduire les facteurs de qualité correspondants.

Comparer avec les valeurs obtenues à l'aide des autres expressions donnant le facteur de qualité, y compris celles utilisant les oscillations libres. Discuter les différents résultats.

5. Application à la mesure d'une résistance et d'une capacité inconnue.

Remplacer la résistance AOIP par la résistance R_x et le condensateur C par le condensateur C_x . Utiliser les résultats précédents pour déterminer la valeur de R_x et C_x en estimant les incertitudes correspondantes.

