

III-OSCILLATIONS LIBRES DES SYSTEMES A DEUX DEGRES DE LIBERTE

- THEMES:
- Systèmes symétriques couplés.
 - Observation des battements.
 - Observation des modes propres.
 - Mesures des fréquences propres.
 - Mesure du coefficient de couplage.

I. Etude d'un système mécanique à deux degrés de liberté:

1. Les pulsations propres.

Soit le système mécanique représenté sur la figure III-1 et composé de deux oscillateurs harmoniques (m_1, k_1) et (m_2, k_2) couplés par un ressort de constante de raideur k . Les deux masses sont supposées se déplacer sans frottement sur un plan horizontal et leurs élongations par rapport à leurs positions d'équilibre sont repérées par x_1 et x_2 .

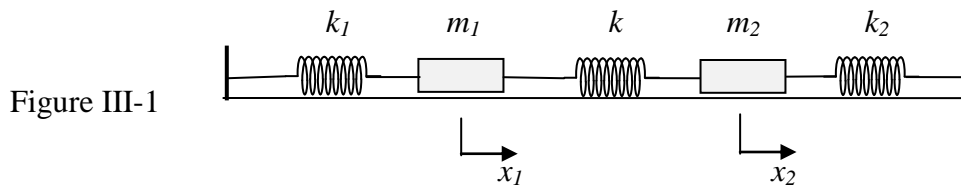


Figure III-1

Lorsque ce système est écarté de sa position d'équilibre puis abandonné à lui même, il effectue un mouvement vibratoire libre. Les équations décrivant la variation des élongations x_1 et x_2 en fonction du temps, s'écrivent comme suit:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k(x_1 - x_2) = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_2 x_2 + k(x_2 - x_1) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Les solutions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont des combinaisons linéaires des deux modes propres $X_1(t)$ et $X_2(t)$, harmoniques de pulsations propres Ω_1 et Ω_2 . Ces dernières sont les racines de l'équation suivante:

$$m_1 m_2 \Omega^4 - \Omega^2 [m_2(k_1 + k) + m_1(k_2 + k)] + (k_1 + k)(k_2 + k) - k^2 = 0$$

En posant :

$$\omega_1^2 = \frac{(k_1+k)}{m_1}, \quad \omega_2^2 = \frac{(k_2+k)}{m_2} \quad \text{et} \quad K^2 = \frac{k^2}{(k_1+k)(k_2+k)}$$

l'équation aux pulsations propres se met sous la forme :

$$\Omega^4 - \Omega^2(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \omega_1^2 \omega_2^2 (1 - K^2) = 0$$

et ses racines sont données par :

$$\begin{cases} \Omega_1^2 = \frac{1}{2} [(\omega_1^2 + \omega_2^2) - \sqrt{(\omega_2^2 - \omega_1^2)^2 + 4K^2 \omega_1^2 \omega_2^2}] \\ \Omega_2^2 = \frac{1}{2} [(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \sqrt{(\omega_2^2 - \omega_1^2)^2 + 4K^2 \omega_1^2 \omega_2^2}] \end{cases} \quad (2)$$

Le nombre K , compris entre 0 et 1, est appelé coefficient de couplage entre les deux oscillateurs.

Dans le cas d'un système symétrique ($m_1 = m_2 = m, k_1 = k_2$), les relations (2) deviennent

$$\Omega_1^2 = \omega^2(1 - K) \text{ et } \Omega_2^2 = \omega^2(1 + K) \quad (3)$$

avec
$$\omega^2 = \frac{(k_1+k)}{m_1} = \frac{(k_2+k)}{m_2} \text{ et } K = \frac{k}{k_1+k} = \frac{k}{k_2+k}$$

En déduire les expressions des pulsations propres suivantes :

$$\Omega_1^2 = \omega_0^2 \text{ et } \Omega_2^2 = \omega_0^2 \frac{(1+K)}{(1-K)}$$

Avec $\omega_0^2 = \frac{k_1}{m_1} = \frac{k_2}{m_2}$ (ω_0 = pulsation propre de chacun des deux oscillateurs harmoniques seul)

La figure III-2 représente la variation des pulsations propres en fonction du coefficient de couplage K dans le cas d'un système symétrique.

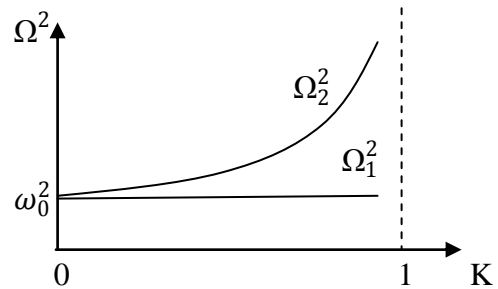


Figure III-2

2. Le phénomène de battements.

Les solutions générales sont alors données par:

$$x_1(t) = A_1 \cos(\Omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\Omega_2 t + \varphi_2)$$

$$x_2(t) = A_1 \cos(\Omega_1 t + \varphi_1) - A_2 \cos(\Omega_2 t + \varphi_2)$$

Pour des conditions initiales bien choisies, on peut écrire :

$$\begin{cases} x_1(t) = A_1(\cos \Omega_1 t + \cos \Omega_2 t) = 2A \cos\left(\frac{\Omega_2 - \Omega_1}{2} t\right) \cos\left(\frac{\Omega_2 + \Omega_1}{2} t\right) \\ x_2(t) = A_1(\cos \Omega_1 t - \cos \Omega_2 t) = 2A \sin\left(\frac{\Omega_2 - \Omega_1}{2} t\right) \sin\left(\frac{\Omega_2 + \Omega_1}{2} t\right) \end{cases} \quad (4)$$

On observe ainsi deux sinusôides de pulsation égale à $\frac{\Omega_2 + \Omega_1}{2}$, en quadrature de phase, modulées par deux sinusôides de pulsation égale à $\frac{\Omega_2 - \Omega_1}{2}$, également en quadrature de phase. C'est le phénomène de battements (figure III-3). La mesure des périodes de battements T_B et d'oscillation T_{OSC} permet d'accéder aux pulsations propres du système puis au coefficient de couplage K .

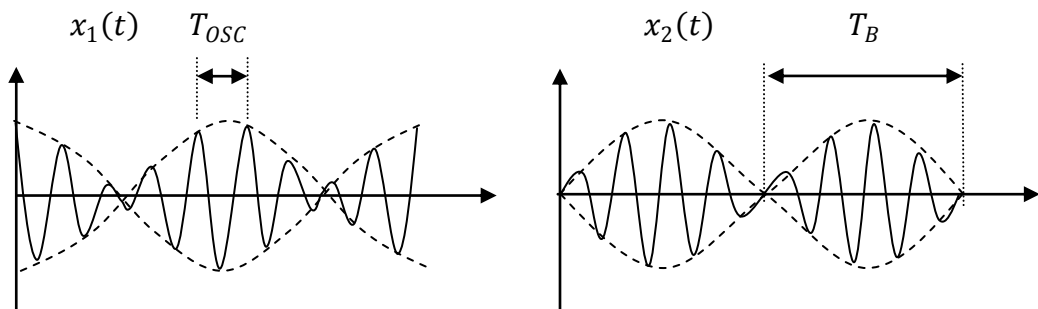


Figure III-3

On se propose au cours de cette manipulation de mesurer les pulsations propres et le coefficient de couplage par l'observation des battements et des modes propres d'un système électrique (circuits RLC couplés par capacité). Cela sera éventuellement complété par des mesures analogues sur un système mécanique à deux degrés de liberté (pendules simples couplés par ressort).

II. Etude de deux circuits électriques couplés

Les équations régissant les courants i_1 et i_2 des circuits couplés représentés sur la figure III-4 s'écrivent comme suit:

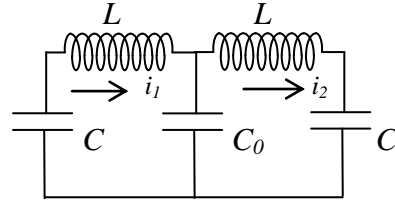


Figure III-4

$$\begin{cases} L_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C_1} \int i_1 dt + \frac{1}{C_0} \int (i_1 - i_2) dt = 0 \\ L_2 \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C_2} \int i_2 dt + \frac{1}{C_0} \int (i_2 - i_1) dt = 0 \end{cases} \quad (5)$$

ou bien, en introduisant les charges électriques $q_1(t)$ et $q_2(t)$,

$$\begin{cases} L_1 \ddot{q}_1 + \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_1 - q_2}{C_0} = 0 \\ L_2 \ddot{q}_2 + \frac{q_2}{C_2} + \frac{q_2 - q_1}{C_0} = 0 \end{cases} \quad (6)$$

On obtient donc un système analogue au système (1). Les solutions $q_1(t)$ et $q_2(t)$ seront de la même forme que $x_1(t)$ et $x_2(t)$. Pour étudier les battements de x_1 et x_2 , il suffit alors d'observer ceux des tensions aux bornes des capacités C_1 et C_2 , tensions proportionnelles à q_1 et q_2 .

III. Les modes propres.

Le système d'équations couplées (6) peut être mis, dans le cas symétrique ($L_1=L_2=L$ et $C_1=C_2=C$), sous la forme découlée suivante:

$$\begin{cases} \ddot{Q}_1 + \Omega_1^2 Q_1 = 0 & \text{avec } \Omega_1^2 = \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \\ \ddot{Q}_2 + \Omega_2^2 Q_2 = 0 & \text{avec } \Omega_2^2 = \omega_0^2 \left(1 + 2\frac{C}{C_0}\right) \end{cases} \quad (7)$$

où on a posé $Q_1 = q_1 + q_2$ et $Q_2 = q_1 - q_2$.

Les solutions (harmoniques) de ce système sont les modes propres

$$Q_1(t) = A_1 e^{j(\Omega_1 t + \varphi_1)} \quad \text{et} \quad Q_2(t) = A_2 e^{j(\Omega_2 t + \varphi_2)}$$

Les grandeurs A_1 , A_2 , φ_1 et φ_2 sont des constantes d'intégration dépendant des conditions initiales.

Les charges $q_1(t)$ et $q_2(t)$ se déduisent alors sans peine:

$$\begin{aligned} q_1(t) &= \frac{1}{2} [Q_1(t) + Q_2(t)] = \frac{A_1}{2} e^{j(\Omega_1 t + \varphi_1)} + \frac{A_2}{2} e^{j(\Omega_2 t + \varphi_2)} \\ q_2(t) &= \frac{1}{2} [Q_1(t) - Q_2(t)] = \frac{A_1}{2} e^{j(\Omega_1 t + \varphi_1)} - \frac{A_2}{2} e^{j(\Omega_2 t + \varphi_2)} \end{aligned}$$

Si on observe des tensions proportionnelles à q_1+q_2 et $q_1- q_2$, on mettra en évidence, les vibrations sinusoïdales correspondant aux deux modes propres. La mesure de leurs périodes respectives T_1 et T_2 permettra alors de déduire les pulsations propres de système : $\Omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$ et $\Omega_2 = \frac{2\pi}{T_2}$

III. Réalisation pratique

On utilise le montage représenté sur la figure III-5. Comme dans le cas de l'oscillateur à un degré de liberté, l'élongation initiale est apportée par un signal carré $e(t)$ de période relativement grande devant celles des oscillations propres du circuit (cf TP n° 1). Dans ce cas, bien que le régime soit forcé, les oscillations peuvent être alors considérées comme libres sur chaque demi-période du signal carré.

En effet, le système (6) s'écrit alors, pour un signal carré alterné $\pm e_0$

$$\begin{cases} L_1 \ddot{q}_1 + \frac{q_1}{C} + \frac{q_1 - q_2}{C_0} = \pm e_0 \\ L_2 \ddot{q}_2 + \frac{q_2}{C} + \frac{q_2 - q_1}{C_0} = 0 \end{cases} \quad (8)$$

En effectuant le changement de variables

$$q_1 = p_1 + a_1 \quad \text{et} \quad q_2 = p_2 + a_2$$

où a_1 et a_2 sont des constantes, on obtient le système suivant:

$$\begin{cases} L_1 \ddot{p}_1 + \frac{p_1}{C} + \frac{p_1 - p_2}{C_0} = 0 \\ L_2 \ddot{p}_2 + \frac{p_2}{C} + \frac{p_2 - p_1}{C_0} = 0 \end{cases} \quad (9)$$

dont les solutions $p_1(t)$ et $p_2(t)$ sont celles du régime libre, telles qu'exprimées par les équations (4) et représentées sur la figure III-3.

Les charges observées, $q_1(t)$ et $q_2(t)$, se déduisent de $p_1(t)$ et de $p_2(t)$ par un décalage égal à a_1 et a_2 respectivement. Pour chaque demi-période du signal carré donc, les oscillations s'effectuent autour de la valeur a_1 pour $q_1(t)$ et a_2 pour $q_2(t)$.

Montrer que les tensions $V_1(t) = \frac{1}{C} q_1(t)$ et $V_2(t) = \frac{1}{C} q_2(t)$ oscillent autour de leurs valeurs moyennes respectives $\pm e_0 \frac{1}{1+K}$ et $\pm e_0 \frac{K}{1+K}$ et qu'il est possible de déduire la valeur du coefficient de couplage par simple comparaison de ces dernières.

Les valeurs de C et C_0 sont données en séance de TP. On utilisera pour L les deux bobines disponibles sur les tables. Comme pour les manipulations précédentes, le signal $e(t)$ est délivré par un GBF à travers un diviseur de tension.

1. Etude des battements:

a. Observation

On choisira la fréquence du signal d'entrée suffisamment faible devant les fréquences propres (dans ce cas de 100 à 200 Hz) afin d'obtenir plusieurs oscillations de battement sur l'écran de l'oscilloscope.

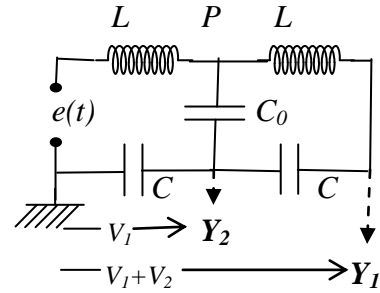


Figure III-5

Le GBF et l'oscilloscope ayant des masses électriques communes, il n'est pas possible d'observer simultanément les tensions $V_1(t) = \frac{q_1(t)}{C}$ et $V_2(t) = \frac{q_2(t)}{C}$. Le montage proposé permettant d'observer les tensions $V_1(t)$ sur la voie Y_2 et $V_1(t) + V_2(t)$ sur la voie Y_1 , on peut, en utilisant les fonctions inversion de la voie 2, "INV Y_2 " ou ($- Y_2$) et addition ADD ou ($Y_1 + Y_2$) de l'oscilloscope, obtenir les signaux $V_2(t)$ (voie 1 moins voie 2) et $V_1(t)$ (directement sur la voie 2) successivement sans modification de connexions.

- Observer, de cette manière, les signaux V_1 et V_2 et comparer avec les prévisions théoriques (allures, déphasage, etc...). Pour l'observation correcte de V_2 , il est nécessaire que les calibres des voies 1 et 2 soient les mêmes.

b. Mesures à effectuer:

- Mesurer les périodes des oscillations T_0 et des battements T_B . En déduire les valeurs des fréquences propres F_1 et F_2 puis celles du coefficient de couplage K et de la fréquence propre F_0 des oscillateurs découplés.
- Effectuer une mesure directe de la fréquence propre F_0 (voir manipulations sur les systèmes à un degré de liberté) et comparer à la valeur calculée précédemment.
- Mesurer les valeurs moyennes autour desquelles oscillent $V_1(t)$ et $V_2(t)$. En déduire la valeur du coefficient de couplage K .

2. Etude des modes propres:

La tension adressée sur la voie 1 de l'oscilloscope est, comme signalé précédemment, proportionnelle au premier mode propre $q_1 + q_2$ dont l'observation ne soulève aucune difficulté.

- Comparer l'allure de l'oscillation observée avec les prévisions. Mesurer sa période T_1 à l'aide de l'oscilloscope.

On relie ensuite le point P à l'entrée Y_1 de l'oscilloscope. La tension observée sur cette voie est ainsi la somme $V_0 + V_1$ des tensions V_0 aux bornes de C_0 et V_1 aux bornes du condensateur de la première maille. La tension V_0 étant égale à $\frac{q_1 - q_2}{C_0}$, l'opération « voie 1 moins voie 2 » permet l'observation de V_0 , tension proportionnelle au deuxième mode propre $q_1 - q_2$.

- Observer celui-ci et comparer son allure avec les prévisions. Mesurer sa période T_2 à l'aide de l'oscilloscope.
- Dédire de ces mesures le coefficient de couplage K du système.

3. Comparaison entre les différentes méthodes:

- Calculer la valeur théorique du coefficient de couplage K en utilisant les valeurs données pour les capacités C et C_0 .
- Dresser un tableau comparatif résumant les résultats obtenus par les différentes méthodes (valeur théorique, battements, valeurs moyennes, modes propres) et discuter.