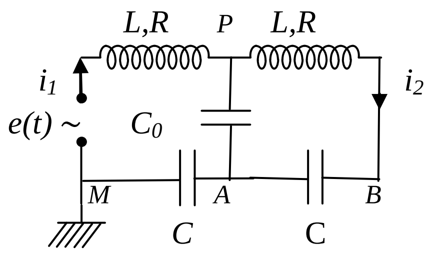
# IV-OSCILLATIONS FORCEES DES SYSTEMES A DEUX DEGRES DE LIBERTE

THEMES: -Réponse à une excitation sinusoïdale
-Résonance et antirésonance
-Influence du couplage sur les fréquences propres

## I. Etude de la réponse à une excitation extérieure sinusoÏdale:

On considère les circuits couplés symétriques de la figure III-5 alimentés à présent par une source de tension sinusoïdale $e(t) = e_0 e^{j\omega t}$.




*$C_0$* étant la capacité du condensateur de couplage, le coefficient $K$ de couplage entre les deux mailles est donné par (voir étude des oscillations libres):

$K = \frac{C}{C_0+C}$ dont on déduit $\frac{C}{C_0} = \frac{1-K}{K}$

Montrer que les tensions $V_1(t)$ et $V_2(t)$ aux bornes des condensateurs de la première et de la seconde maille respectivement, sont régies par les équations suivantes:

$$\begin{cases} \ddot{v}_1 + 2\delta\dot{v}_1 + \omega_0^2 \frac{1}{1-K} v_1 - \omega_0^2 \frac{K}{1-K} v_2 = \omega_0^2 e_0 e^{j\omega t} \\ \ddot{v}_2 + 2\delta\dot{v}_2 + \omega_0^2 \frac{1}{1-K} v_2 - \omega_0^2 \frac{K}{1-K} v_1 = 0 \end{cases}$$

dans lesquelles on a posé $\delta = \frac{R}{2L}$ et $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$

On peut également étudier les oscillations du système à partir des courants de mailles $i_1(t)$ et $i_2(t)$ qui, par intégration, donneront les charges $q_1(t)$ et $q_2(t)$ et donc les tensions $v_1(t)$ et $v_2(t)$ cherchées.

Si on pose $Z = R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})$, impédance de chacune des mailles découplées, montrer qu'on a:

$$i_1 + i_2 = \frac{e}{Z} \quad \text{et}$$

$$i_1 - i_2 = jZC_0\omega i_2$$

Les solutions de ce système sont les suivantes :

$$i_1 = \frac{1+jZC_0\omega}{Z(2+jZC_0\omega)} e(t)$$

$$i_2 = \frac{1}{Z(2+jZC_0\omega)} e(t)$$

On en déduit :

$$v_1(t) = \frac{\frac{K}{1-K}+[(1-x^2)+2j\beta x\,)]}{[(1-x^2)+2j\beta x\,][\frac{2K}{1-K}+(1-x^2)+2j\beta x\,]}\,e(t)$$

$$v_2(t) = \frac{\frac{K}{1-K}}{[(1-x^2)+2j\beta x\,][\frac{2K}{1-K}+(1-x^2)+2j\beta x\,]}\,e(t)$$

en ayant posé: $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ et $\beta = \frac{\delta}{\omega_0}$

| |
|---|
| Montrer que les amplitudes de $v_1(t)$ et $v_2(t)$ tendent respectivement vers $e_0\frac{1}{1+K}$ et $e_0\frac{K}{1+K}$ quand $\omega$ ten vers 0. |

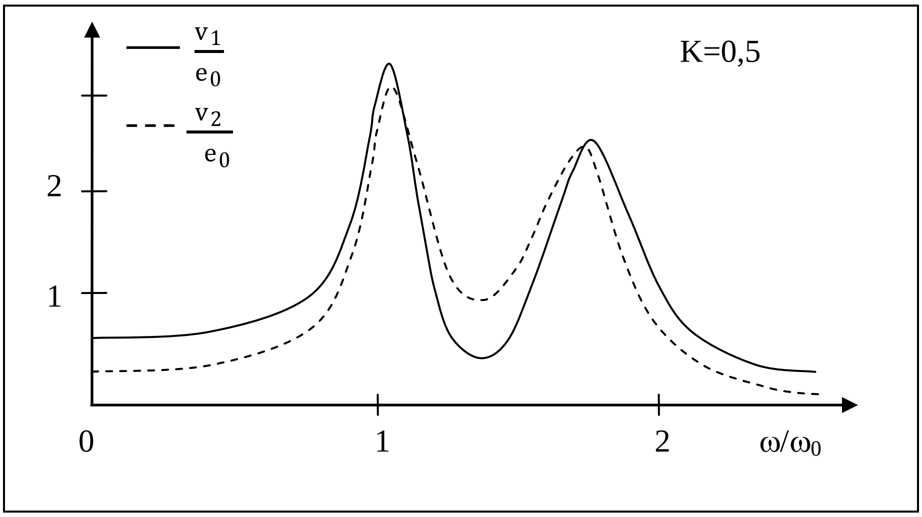



Figure IV-1

La figure IV-1 présente, à titre d'exemple, la variation des amplitudes relatives $\frac{v_1}{e_0}$ et $\frac{v_2}{e_0}$ en fonction de $x = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f}{f_0}$ pour un système symétrique et un coefficient de couplage *K= 0,5*. On y observe la présence de deux résonances pour chacune des amplitudes. La position de ces deux résonances dépend, bien entendu, du coefficient de couplage mais aussi du degré d'amortissement β. On constate cependant que, pour des amortissements faibles, les résonances se produisent pour des fréquences $f = F_1 = \frac{\Omega_1}{2\pi}$ et $f = F_2 = \frac{\Omega_2}{2\pi}$ fréquences propres du système. Ainsi, pour *K = 0,5*, on a $F_1 = F_0$ et $F_2 = F_0\sqrt{3}$ (voir étude des oscillations libres). On observe bien sur la figure IV-1 que les deux résonances se produisent pour des valeurs de $\omega/\omega_0$ très proches de 1 et de $\sqrt{3}$.

On constate également que pour une certaine fréquence comprise entre $F_1$ et $F_2$, l'amplitude de $v_1(t)$ devient très petite (d'autant plus petite que l'amortissement est faible). Ainsi, en excitant le système sur cette pulsation dite <u>d'antirésonance,</u> les oscillations de la première maille sont considérablement atténuées. Ce phénomène constitue le principe de l'atténuateur de vibrations.

Montrer que, dans le cas de très faibles amortissements ($\delta \ll \omega_0$), la fréquence $F_{min}$ pour laquelle on obtient l'atténuation de la vibration du premier degré de liberté est donnée par : $F_{min}^2 = F_0^2 \frac{1}{1-K}$

Dans une première partie, il s'agira d'observer à l'oscilloscope l'évolution des tensions $v_1(t)$ et $v_2(t)$, en fonction de la fréquence d'excitation $f = \frac{\omega}{2\pi}$ puis tracer les deux courbes de réponse donnant la variation de leurs amplitudes en fonction de $f$, cela pour un coefficient de couplage donné. On mettra ainsi en évidence les phénomènes de résonance et d'atténuation de la vibration.

Au cours de la deuxième partie, on mettra à profit ce phénomène de résonance et les propriétés qui ont été mises en évidence pour étudier la variation des fréquences propres du système en fonction du coefficient de couplage.

II. Réalisation pratique

On reprendra le dispositif expérimental utilisé pour les oscillations libres, le GBF délivrant cette fois-ci une tension sinusoïdale de fréquence variable et d'amplitude maintenue constante durant toute la manipulation. Les tensions $v_1(t)$ et $v_2(t)$ sont observées selon la technique déjà employée (utilisation des fonctions $Y_1+Y_2$ et $-Y_2$ de l'oscilloscope). Les valeurs de $C$ et $C_0$ sont données en séance de TP.

Observer sur une des deux voies de l'oscilloscope le signal $e(t)$. Régler et noter son amplitude $e_0$

Première partie - Etude des courbes de réponse en tension

1. Observation des réponses $v_1(t)$ et $v_2(t)$:

Connecter l'oscilloscope de telle sorte qu'il soit possible de visualiser alternativement les tensions $v_1(t)$ et $v_2(t)$. Faire varier sur une large gamme la fréquence $f$ du signal d'entrée $e(t)$ en observant la forme de $v_1$ et $v_2$. En particulier, mettre en évidence les deux résonances et l'antirésonance de $v_1$. Mesurer les fréquences et les amplitudes à la résonance.

2. Tracé des courbes de réponse

Le tracé doit être effectué en même temps que les mesures. Les valeurs maximales des amplitudes ayant été mesurées précédemment, l'échelle verticale en $v/e_0$ peut donc être définie au préalable. Par ailleurs, on fera varier la fréquence $f$ à partir de $0$ environ jusque vers $3F_0$. (Rappel: $F_0$ représente la fréquence propre de chacune des deux mailles découplées). L'échelle horizontale en fréquence peut donc également être définie à l'avance.

Le voisinage des résonances doit être étudié avec soin : il sera nécessaire de resserrer les intervalles des fréquences entre les points de mesures pour bien rendre compte des pics. Chaque courbe devrait comporter une quinzaine de points environ.

- Relever et porter sur le graphe, pour chaque valeur de la fréquence *f*, les amplitudes de $\frac{v_1}{e_0}$ et de $\frac{v_2}{e_0}$.

3. Comparaison avec les prévisions:

- Déduire, à partir du graphe, la valeur des fréquences de résonance $F_1$ et $F_2$ ainsi que $F_{\min}$, fréquence d'antirésonance de l'oscillation $v_1(t)$ puis estimer les valeurs limites des amplitudes quand $f$ tend vers *0*. Calculer le coefficient de couplage en utilisant les différentes relations introduites dans la partie théorique .
- Calculer la valeur théorique de ces mêmes grandeurs à partir des éléments du circuit.
- Comparer les deux ensembles de valeurs.
- Comparer également avec les valeurs de $F_1$ , $F_2$ et $K$ obtenues à partir de l'étude des oscillations libres.

Deuxième partie - Influence du couplage sur les fréquences propres

Les résultats obtenus au cours de la partie précédente ont permis de montrer qu'un système forcé à deux degrés de liberté entre en résonance chaque fois que la fréquence de l'excitation extérieure est égale (ou très proche) d'une des deux fréquences propres du système.

On se propose dans cette partie d'utiliser ce phénomène de résonance pour mesurer les fréquences propres $F_1$ et $F_2$ d'un système à deux degrés de liberté dont on fait varier le coefficient de couplage $K$. Le but est l'étude de l'évolution de $F_1$ et $F_2$ en fonction de $K$, évolution dont l'approche théorique a déjà été exposée dans l'introduction aux oscillations libres.

On conserve le dispositif expérimental précédent avec la possibilité supplémentaire de modifier la capacité $C_0$ à l'aide de divers condensateurs ($0.22\ \mu F$, $10\ nF, \ldots$) qu'on associera en série ou en parallèle. On obtient ainsi différentes valeurs du coefficient de couplage

- Pour chacune de ces valeurs de $K$, on déterminera les deux fréquences de résonance $F_1$ et $F_2$
- Tracer sur le même repère les graphes de $F_1$ et $F_2$ en fonction de $K$. Comparer avec les prévisions théoriques et discuter.