UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE

HOUARI BOUMEDIENE



FACULTE DE PHYSIQUE

TRAVAUX PRATIQUES

DE

VIBRATIONS ET ONDES

Première partie :

TP VOM - OSCILLATIONS

Edition 2018

M. BOUDJEMA **A. BOURDACHE**

0-INTRODUCTION AUX TRAVAUX PRATIQUES

THEMES:
- Oscilloscope double trace
- Générateur de fonctions
- Tracé de courbe
- Déphasage

Cette séance d'introduction aux TP s'est avérée nécessaire du fait des grandes lacunes constatées chez les étudiants de deuxième année des troncs communs ST et SM. Elle doit être considérée comme un ensemble de rappels de notions, en principe, acquises durant les années précédentes (en particulier en première année). Ces notions concernent le fonctionnement et l'utilisation de l'oscilloscope à double trace et du générateur de fonctions à basses fréquences (GBF). Les appareils décrits sont des appareils types. La présentation et la complexité peuvent donc être différentes d'un appareil à un autre. Cette séance s'achèvera par une manipulation permettant aux étudiants de dépasser ces différences et de se familiariser avec tous les types d'appareils utilisés en travaux pratiques de Vibrations et Ondes.

I. L'OSCILLOSCOPE

Un oscilloscope est un appareil d'observation et de mesure de bonne qualité qui permet de visualiser des signaux quelconques, en particulier, les signaux périodiques. On peut lui attribuer quatre fonctions essentielles:

- visualisation de la forme d'un ou deux signaux
- mesure d'amplitude (fonction voltmètre)
- mesure de temps (période, déphasage,…)
- composition de deux signaux (mode XY)

Comme tout appareil de mesure de bonne qualité, un oscilloscope ne modifie pas de façon sensible les caractéristiques du signal observé. La figure 0-1 présente un schéma simplifié de l'oscilloscope.

1. Description de l'oscilloscope

La face avant de l'oscilloscope comporte généralement quatre parties que l'étudiant doit identifier avant l'utilisation (figure 0-2):

- l'écran
- les deux voies verticales
- la base de temps (voie horizontale)
- La synchronisation (déclenchement).

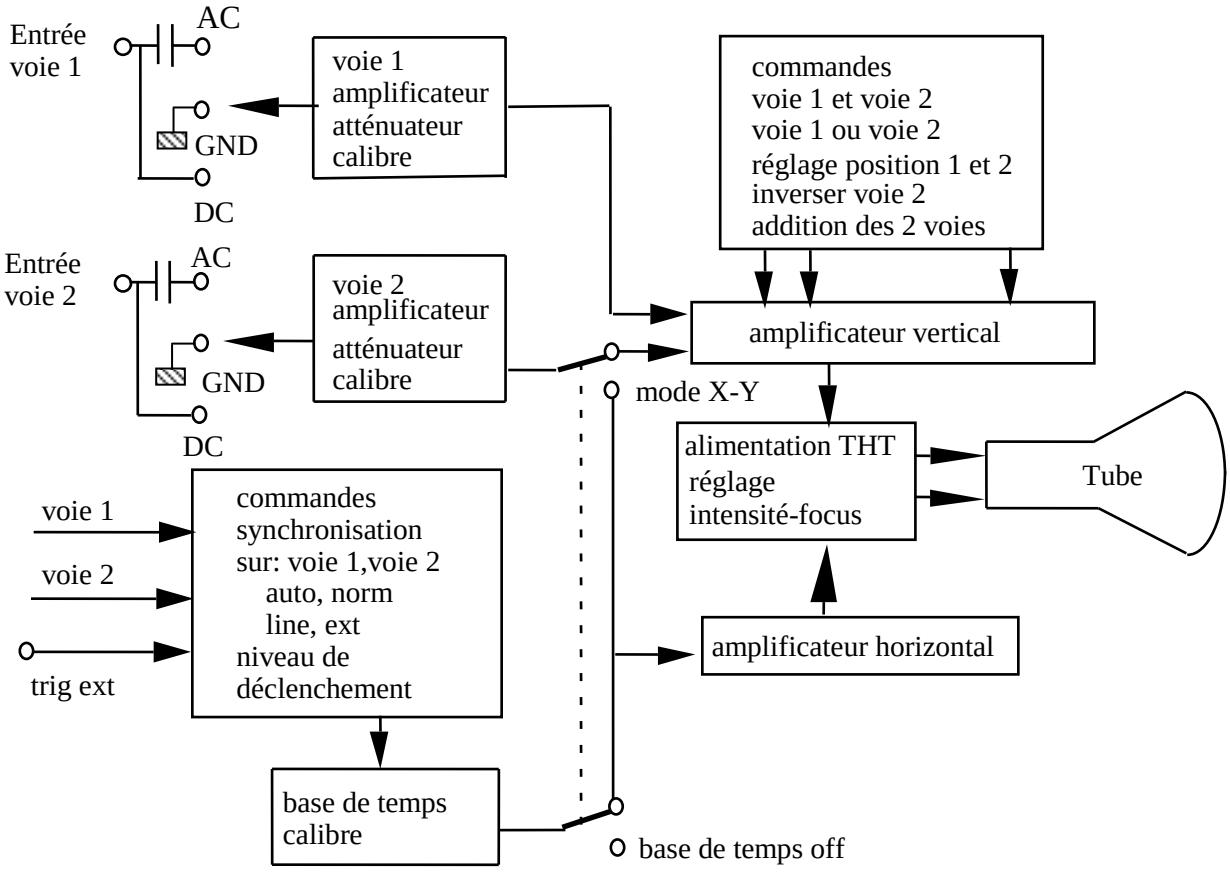


Figure 0-1: Schéma simplifié de l'oscilloscope

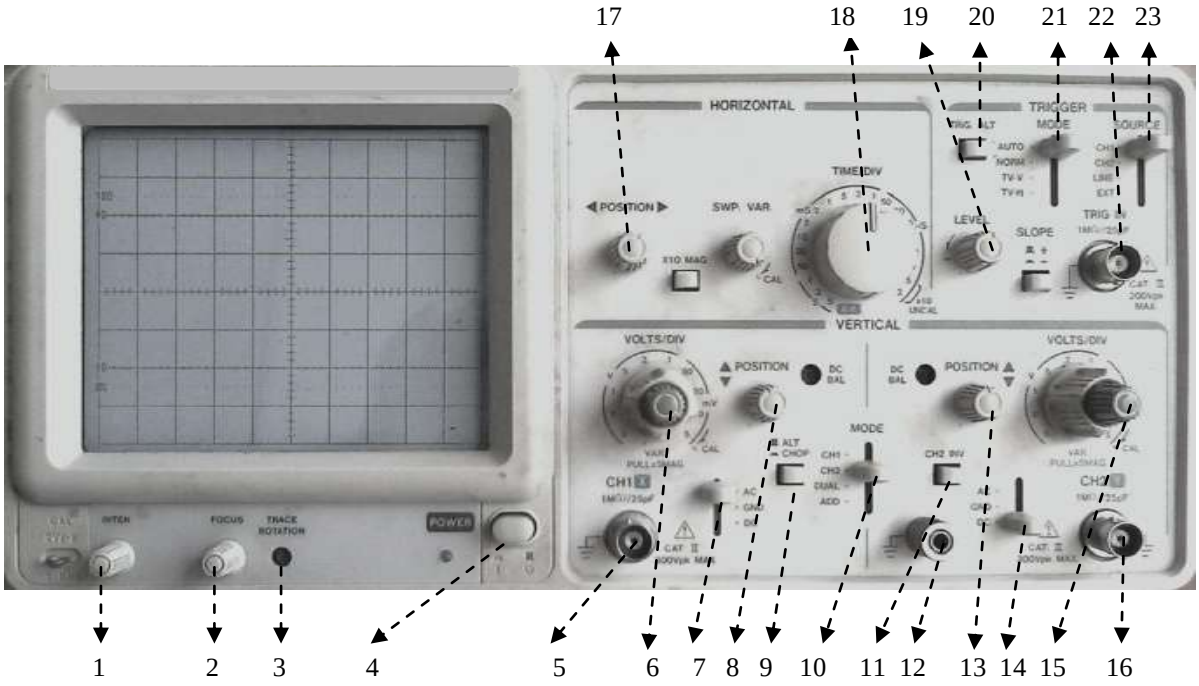


Figure 0-2 : Face avant d'un oscilloscope

I/ Mise en marche et réglage de la qualité du spot	
4	POWER, ON/OF: mise en marche
1	INTENSITY: brillance
2	FOCUS: netteté
3	TRACE ROTATION: horizontalité de la trace
II/ Entrées verticales Y1 et Y2; CH1 et CH2; A et B Fonctions identiques pour les deux voies	
5 et 16	Entrées BNC ou Banane
6 et 15	Bouton de réglage de l'atténuation verticale VOLT/div
8 et 13	Position verticale
7 et 14	Couplage de l'entrée AC, DC, GND
12	Masse commune
Sélection du mode de déflection verticale	
9	MODE ALT/CHOP/
10	CH1, CH2, DUAL et ADD: Fonction addition des 2 voies
11	INV ou -Y2: fonction inversion de la voie 2
III/ Base de temps: TIME, SWEEP ou BALAYAGE	
18	Bouton de réglage de la vitesse de balayage TIME/DIV
17	Réglage de la position horizontale
IV/ Déclenchement du balayage TRIGGER	
21	Mode de déclenchement: AUTO, NORMAL, TV-H,TV-V
23	Source de déclenchement: CH1/CH2/LINE/EXT
19	LEVEL: Niveau de déclenchement
22	EXT. TRIG: Entrée de déclenchement extérieur
20	TRIG ALT : Déclenchement alterné sur les deux voies

a. L'écran

Il est gradué horizontalement et verticalement en divisions (carreaux) et en cinquième de division sur les deux axes centraux. On lui associe deux boutons de réglage, l'un pour l'intensité lumineuse (INTENSITY), l'autre pour la netteté du tracé (FOCUS). Une vis permet de régler l'horizontalité du tracé (TRACE ROTATION).

b. Les voies verticales 1 (CH1, Y1, ou A) et 2 (CH2, Y2 ou B)

Elles sont identiques et donnent les variations du signal sur un axe vertical. Chacune comporte une entrée BNC, un bouton de réglage de la position verticale, un bouton de calibre (volt/division) et un commutateur de mode de couplage DC-AC-GND.

Pour visualiser de manière satisfaisante un signal, il faut, soit l'atténuer s'il sort du cadre de l'écran, soit l'amplifier s'il apparait trop petit. C'est le commutateur de calibre qui assure cette fonction. Il faut noter que le calibre indiqué n'est correct que si on est en position « calibré » (CAL.).
Lorsque le commutateur de mode de couplage est sur GND, le signal est déconnecté et remplacé par la « masse » (zéro des potentiels). Sur DC, le signal est intégralement connecté à l'oscilloscope. Sur AC, le signal passe à travers un condensateur qui supprime ainsi une éventuelle composante continue. Cette dernière position est particulièrement utile lorsque le signal oscille avec une faible amplitude autour d'une composante continue assez élevée. Dans ce cas, en mode DC, on doit utiliser des calibres élevés (donc peu sensibles) sinon le signal disparait hors de l'écran. La mesure devient difficile car les oscillations apparaissent alors trop petites. En utilisant le mode AC, on supprime la composante continue, ce qui permet de n'amplifier que la partie variable du signal.

c. La base de temps

La base de temps comporte un commutateur de calibre (TIME/DIV) et un potentiomètre de position horizontale (↔). Elle fonctionne de la manière suivante: en l'absence de signal sur les voies 1 et 2 (ou en position GND) le spot lumineux se déplace de la gauche vers la droite à une vitesse constante dont la valeur dépend de la position du commutateur de base de temps. Plus le calibre est faible (vers les µs) et plus le spot se déplace rapidement. Lorsque le spot arrive à l'extrémité droite de l'écran, il revient très rapidement vers l'extrémité gauche (le déplacement de la droite vers la gauche s'effectuant sans lumière), puis le même processus se répète sans cesse. La distance parcourue horizontalement par le spot est proportionnelle au temps et peut donc le symboliser. Le facteur de proportionnalité est donné par l'indicateur du commutateur de base de temps (TIME/DIVISION). Si un signal est introduit sur une des deux voies verticales, on observera donc sur l'écran sa variation en fonction du temps.
En mode XY, la base de temps est déconnectée. Elle est remplacée par le signal présent sur la voie1. On représente ainsi le signal 2 en fonction du signal 1 (composition des deux signaux).

d. Synchronisation

La synchronisation est étroitement liée à la base de temps, elle en améliore le fonctionnement.
Nous avons expliqué brièvement comment s'effectue le tracé dans la partie « base de temps ». En fait, on ne peut visualiser sur l'écran que des portions successives du signal. La durée de chaque portion est égale au temps que met le spot à parcourir la largeur de l'écran. Les portions successives ne démarrent pas toujours de manière identique. De ce fait, l'image n'est pas stable (figure 0-3).
Pour avoir un tracé stable, il est nécessaire que chaque portion de signal démarre à gauche de l'écran avec la même amplitude et dans le même sens que la précédente. De cette manière elles se superposent et donnent l'impression que le signal est fixe (il n'est question que des signaux périodiques).
Pour cela, à chacun de ses retours vers la gauche, le spot attend que le signal reprenne la même amplitude qu'au début de la portion précédente avant de repartir vers la droite (figure 0-4). Cette

amplitude est fixée à l'aide du bouton de niveau de déclenchement (LEVEL). Cette opération s'appelle la synchronisation. Le signal utilisé pour déclencher le balayage est la source de déclenchement. On peut ainsi choisir de déclencher le balayage avec le signal 1 ou 2, avec celui qui est visualisé sur l'écran indifféremment, avec les deux voies alternativement ou avec un signal extérieur connecté sur la borne EXT.

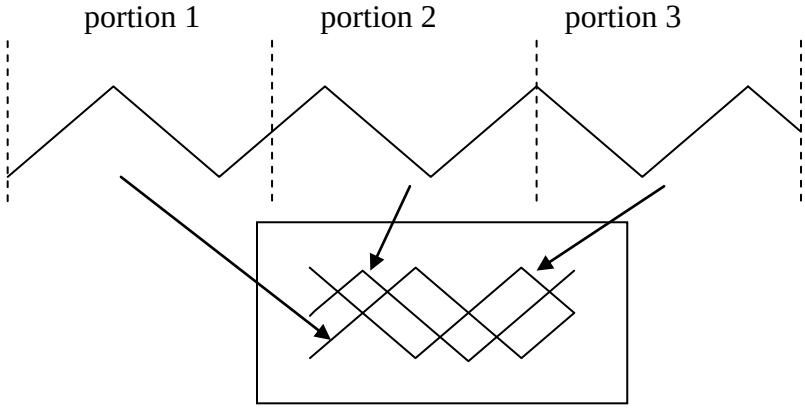


Figure 0-3 : Tracé d'un signal sans synchronisation

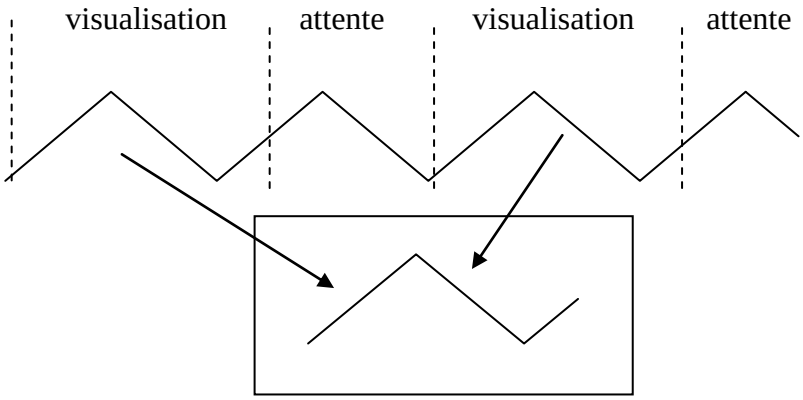


Figure 0-4 : Tracé d'un signal avec synchronisation

Il existe enfin deux fonctions associées au déclenchement :

-la fonction NORM pour laquelle il n'y a déclenchement que s'il existe un signal sur la voie choisie comme source. En l'absence de signal sur cette voie, il n'y a pas de trace à l'écran.

-la fonction AUTO pour laquelle le balayage est constamment assuré. Si le signal choisi comme source n'existe pas, le balayage est déclenché automatiquement par le système.

Remarque : Lorsque le déclenchement alterné (TRIG ALT) est activé, la mesure du déphasage entre les deux signaux n'est plus possible. Il sert essentiellement à synchroniser deux signaux de fréquences différentes.

II. GENERATEUR DE FONCTIONS BASSES FREQUENCES

Le générateur de fonctions (GBF) est un appareil qui génère des signaux de différentes formes : sinusoïdale, carrée, triangulaire, TTL, parfois en dents de scie, rampe et impulsion. La fréquence du signal varie entre quelques Hz à quelques MHz. Sur certains générateurs, il existe un deuxième générateur qui délivre un signal en dent de scie qui module celui délivré par le premier générateur.

1. Description

Un schéma simplifié type et une « face avant » sont donnés respectivement par les figures 0-5 et 0-6. Les signaux sont délivrés sur la sortie 50Ω par la fiche BNC à l'exception du signal TTL disponible sur une sortie à part. L'indication « sortie 50Ω » signifie qu'il s'agit d'un générateur réel d'impédance interne égale à 50Ω, équivalent donc à une source de tension (générateur parfait) en série avec une impédance de 50Ω. Il faudra tenir compte de cette impédance dans les circuits alimentés par le GBF.

Le signal TTL est un signal carré dont l'amplitude commute d'une demi-période à l'autre de 0 à 5 Volts.

La fréquence de tous ces signaux peut être fixée par le bouton de réglage des fréquences. Certains générateurs contiennent un fréquencemètre et la fréquence est affichée.

L'amplitude est réglable (sauf pour le signal TTL) à l'aide du potentiomètre d'amplitude entre -V et +V (V dépend du générateur).

Il existe une fonction « OFFSET » ou « DECALAGE » qui permet d'ajouter ou de retrancher un signal continu de hauteur variable au signal délivré.

2. Le générateur de signaux modulés en fréquence

Contrairement au GBF, ce générateur délivre des signaux dont la fréquence varie avec le temps, évoluant entre deux valeurs: la plus petite, F_0, est celle qui est affichée par le premier générateur; la seconde, F_1, est fixée par le potentiomètre d'excursion (WIDTH). Le temps de passage de F_0 à F_1 est réglable à l'aide de bouton ″vitesse de balayage″ (RATE).

La modulation peut également être obtenue par un signal externe. Dans ce cas, le potentiomètre d'excursion doit être sur la position « 0 ».

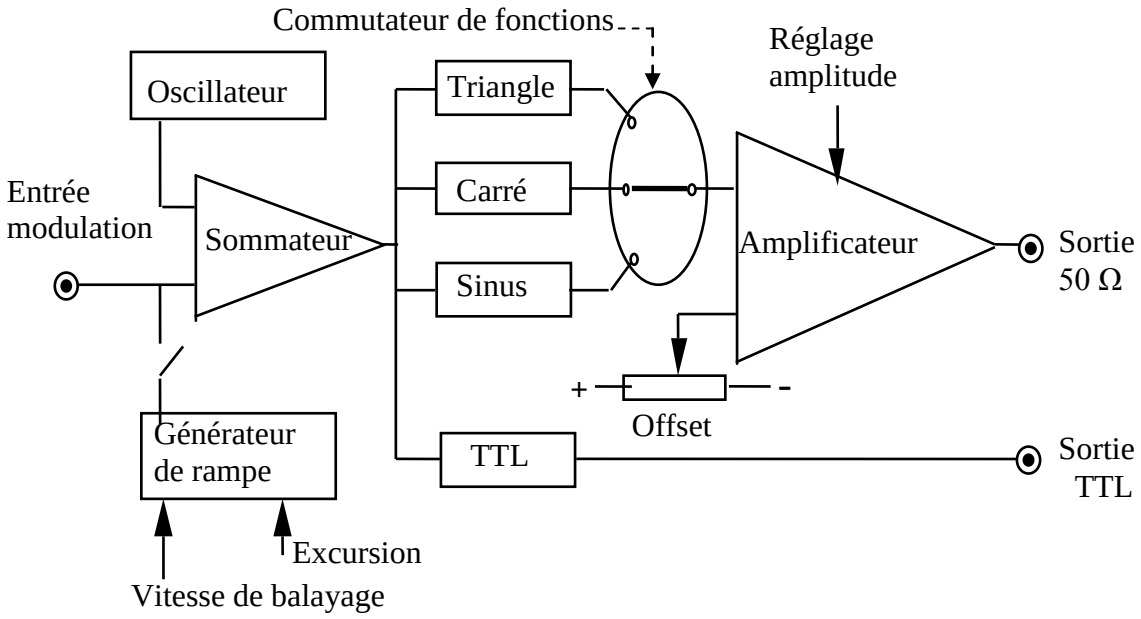


Figure 0-5 : Schéma simplifié du Générateur Basses Fréquences

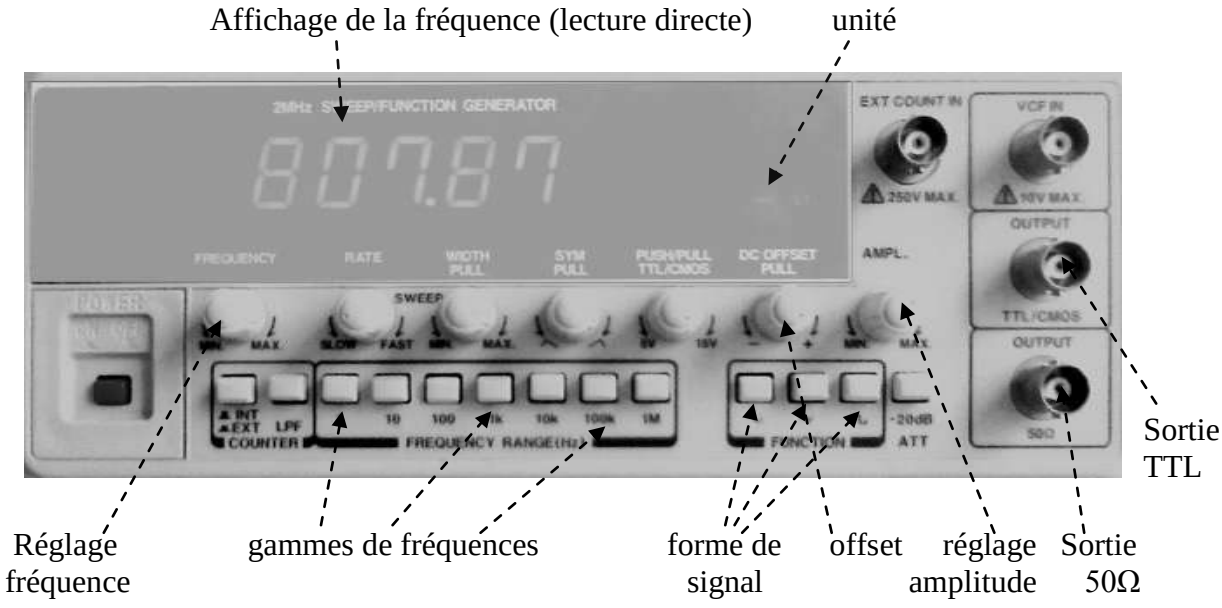


Figure 0-6 : Face avant d'un générateur de fonctions (GBF)

III. MANIPULATION D'INTRODUCTION

Avant d'entamer les manipulations visant à mieux maitriser les différents appareils il semble nécessaire de revenir sur la manière de tracer une courbe.

A.TRACE DE GRAPHE

Dans pratiquement chacune des manipulations, on est amené à représenter les résultats obtenus sous la forme d'un graphe. Il est donc important de savoir bien le tracer pour rendre son exploitation plus pertinente et plus aisée. Les quelques recommandations suivantes aident à atteindre cet objectif.

1/ Le tableau de mesures doit figurer dans le compte-rendu de l'étudiant.

2/ Tracer les axes et les identifier (grandeur représentée sur chaque axe et son unité)

3/ Choix de l'échelle

a/ Elle doit être choisie de sorte que :

- n'importe quel point sur la courbe soit lisible facilement,
- elle ne nécessite pas de règle de trois systématique pour lire une donnée sur le graphe: par exemple 1, 2, 5, 10 cm pour 1Volt. **Les échelles** du type $20\text{cm} \rightarrow 16{,}5\text{Volt}$ (d'où $1{,}21\ \text{cm} \rightarrow 1\text{Volt}$) **sont à proscrire**
- elle permette des mesures les plus précises possibles,
- elle permette une bonne occupation de la feuille,

b/ Une fois l'échelle choisie, graduer les axes grâce à cette échelle.

c/ Eviter de représenter l'échelle par des petites flèches dans un coin de la feuille.

4/ Tracé du graphe

- Reporter les points expérimentaux sur le graphe par l'intermédiaire d'un « + », (la barre verticale symbolise l'erreur sur la variable en ordonnée et l'horizontale celle de la variable en abscisse).
- Ne pas porter les valeurs expérimentales sur les axes, cela surcharge les axes, les rend illisibles.
- Faire passer une courbe lisse le plus près possible d'un maximum de points mais pas forcément par tous les points (il peut apparaître des points erronés dont on doit refaire les mesures).
- Une fois la courbe tracée, les calculs, les interprétations doivent être faits sur la courbe.

Les points expérimentaux ne doivent plus être utilisés. (Une autre raison de pas les porter sur les axes).

5/Application au tracé d'un graphe

En respectant les consignes ci-dessus, tracer le graphe de V(F) dont les variations sont données dans le tableau ci-dessous.

F(kHz)	0,1	0,6	1	1,4	1,8	2,1	2,3	2,5	2,7	2,8	2,9
V(volt)	1,2	1,2	1,3	1,4	1,8	2,4	2,9	3,6	5	6,5	7,7
F(kHz)	2,95	3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,6	3,8	4	4,3	4,7
V(volt)	8,5	8,9	8	6,4	4,9	4,25	2,6	1,9	1,6	1,1	0,9

B. EXPERIMENTATION

On dispose d'un oscilloscope, d'un générateur basses fréquences et d'une série de boîtes de résistances à décades x10Ω, x100Ω, x1000Ω et/ou d'une résistance de 100 Ω.

1. Observations de tensions sans balayage.

Mettre l'oscilloscope sur le mode X-Y, (X: axe horizontal et Y: axe vertical)

Les entrées étant sur DC, connecter la sortie 50Ω du générateur basses fréquences à la voie 1, puis à la voie 2. Identifier la voie qui correspond à l'axe verticale Y. Par la suite, le signal sera connecté sur cette voie.

a. Mesure de tension continue.

Sur le GBF, déclencher l'offset (décalage) et désélectionner la forme des signaux (tous les commutateurs de fonctions sortis).

Mettre le calibre de la voie Y de l'oscilloscope sur 1V/div puis régler l'amplitude de l'offset de façon à obtenir une déviation de 4 divisions sur l'écran de l'oscilloscope (attention à la position de référence!).

En déduire la valeur de cette tension.

Modifier le calibre à 2V/div, puis à 5V/div

Mesurer à chaque fois, la valeur de la tension. Ces valeurs sont-elles cohérentes?

Trouver le meilleur calibre pour effectuer la mesure. Justifier.

b. Mesure d'une tension variable.

L'offset du GBF étant à zéro, mettre le commutateur de fonction sur "signal triangulaire".

Régler la fréquence du générateur à 1Hz. Expliquer le phénomène observé.

Augmenter lentement la fréquence du GBF et expliquer ce qui se passe à l'écran.

Effectuer la même manipulation avec les signaux carré et sinusoïdal.

2. Le balayage

On mettra l'oscilloscope dans la configuration suivante: voie 1 sur DC, déclenchement sur AUTO, source voie 1, base de temps en service. Que signifie cette configuration ?

a. Observation du balayage,

Déconnecter le GBF de l'oscilloscope. En partant de la plus grande valeur, diminuer le calibre de la base de temps. Observer et expliquer.

Reconnecter le GBF à l'oscilloscope (voie 1)

b. Tension continue,

On effectuera la même manipulation qu'en 1-a

c. Etude d'une tension variable,

Régler la fréquence du GBF sur 1kHz. Choisir une vitesse de balayage de 0.2ms/div. Centrer la courbe à l'aide du potentiomètre de position. Si la courbe n'est pas stable agir sur le niveau de déclenchement (LEVEL). Effectuer une mesure d'amplitude de la même manière qu'en 1-a et répondre aux mêmes questions.

d. Mesure de fréquences

La fréquence du GBF étant toujours fixée à 1kHz, mesurer la période du signal observé en choisissant successivement le calibre 0.2ms/div, 0.5ms/div, 1ms/div. Quel est le calibre le plus approprié? Pourquoi?

3. La synchronisation

Le déclenchement étant sur AUTO, choisir la voie 2 comme source de déclenchement.

Modifier le niveau de déclenchement "Level". Expliquer le phénomène observé.

Prendre la voie 1 comme source. Modifier le niveau de déclenchement. Observer le comportement du signal, particulièrement à l'extrémité gauche de l'écran. Expliquer

Effectuer la même manipulation, avec trigger sur NORM. Expliquer.

4. Application: Mesure de la résistance interne du GBF.

Connecter le GBF à l'oscilloscope. Mettre l'amplitude du signal au maximum. Mesurer cette amplitude.

Déconnecter le GBF de l'oscilloscope puis appliquer (sans le modifier) le signal qu'il délivre à la résistance de 100 Ω. Mesurer l'amplitude de la tension aux bornes de cette résistance.

En déduire la résistance interne du GBF.

5. Mesure de déphasage

Le système ci-contre (Figure 0-7) est constitué d'un condensateur de capacité C et d'une résistance R en série alimenté par un générateur qui délivre une tension sinusoïdale *e(t)* de fréquence *f*. $v_c(t)$ est la tension aux bornes de C.

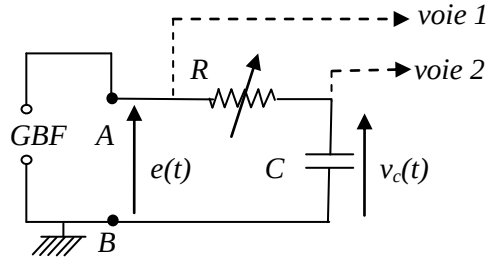


Figure 0-7

On peut écrire $e(t) = Esin\omega t$ et $v_C(t) = V_c\sin(\omega(t-\Delta t))$ ou $v_C(t) = V_c\sin(\omega t + \varphi)$.
Δt est le décalage temporel de $v_C(t)$ par rapport à *e(t).* φ est le déphasage angulaire.

On en déduit que : $\boxed{\varphi = -\omega\Delta t = -2\pi f\Delta t = -\frac{2\pi}{T}\Delta t}$

φ et Δt ont une valeur algébrique, si φ est négatif $v_c(t)$ est en retard sur *e(t)* sinon $v_c(t)$ est en avance sur *e(t).*

Réaliser le montage correspondant au schéma ci-dessus. Le générateur doit délivrer une tension sinusoïdale de fréquence d'environ 1kHz.

Régler la résistance variable à 0, 2000, 3000, 10000 Ω. Mesurer les décalages Δt entre *e(t)* et $v_c(t)$. En déduire les déphasages angulaires correspondant entre *e(t)* et $v_c(t)$ (voir ci-après figures 0-8 et 0-9). La tension $v_c(t)$ est-elle en retard ou en avance par rapport à *e(t)* ?

Méthodes de mesure du déphasage :

- En mode XY (méthode de l'ellipse) :

$$\sin\varphi = \frac{Oa}{OA} = \frac{Ob}{OB} = \frac{aa'}{AA'} = \frac{bb'}{BB'}$$

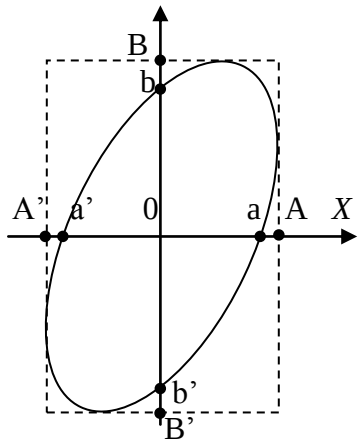


Figure 0-8

- En mode balayage : $\varphi = -\frac{2\pi\Delta t}{T}$ radians

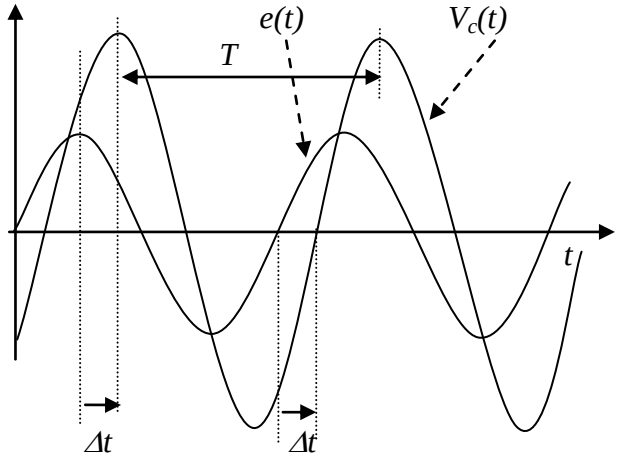


Figure 0-9

I- OSCILLATIONS LIBRES DES SYSTEMES A UN DEGRE DE LIBERTE

THEMES: - Différents régimes d'oscillation
- Résistance critique
- Décrément logarithmique
- Facteur de qualité

I. Étude d'un système mécanique à un degré de librté:

1. Les différents régimes d'oscillations:

La figure I-1 représente le système mécanique à un degré de liberté le plus simple :

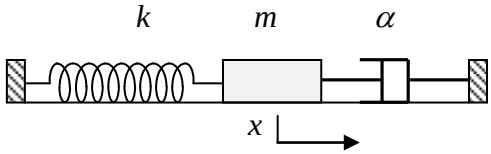


Figure I-1

Le déplacement de la masse *m* par rapport à sa position d'équilibre, appelé élongation, est noté *x*. La constante de raideur du ressort est *k.* Le coefficient de l'amortissement, supposé visqueux, est α. On donne à la masse une élongation initiale donnée X_0 (et/ou une vitesse initiale V_0) puis on abandonne le système à lui-même. C'est le régime libre.

Le déplacement de *m* obéit à l'équation différentielle suivante:

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0$$

qui peut être mise sous la forme normalisée

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (1)$$

en posant : $\delta = \frac{\alpha}{2m}$: facteur d'amortissement

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$: pulsation propre du système

Plus généralement, l'évolution dans le temps de tout système libre à un degré de liberté peut être ramenée à une équation du même type que (1). La résolution de cette équation s'effectue en cherchant des solutions de la forme $Ae^{rt}P_n(t)$ où r est un complexe et $P_n(t)$ un polynôme de degré *n*. On montre que, sauf dans le cas où $r = -\delta$ (racines doubles), le polynôme $P_n(t)$ se réduit à une constante. En remplaçant x par Ae^{rt} dans l'équation (1), on obtient l'équation caractéristique :

$$r^2 + 2\delta r + \omega_0^2 = 0$$

dont la résolution permet de déduire :

$$r_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

La solution sera donc une combinaison des deux racines

$$x(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$$

Trois cas sont envisageables selon le signe du discriminant

$$\Delta' = \delta^2 - \omega_0^2$$

1 er cas: $\Delta' > 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\delta > \omega_0}$

Les racines r_1 et r_2 sont alors réelles et négatives. La solution est une combinaison de deux exponentielles décroissantes. L'élongation diminue au cours du temps pour s'annuler au bout d'un temps suffisant long. C'est le régime dit ″**apériodique**″. Il correspond à un coefficient de frottement élevé.

2 ème cas: $\Delta' = \mathbf{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{\delta = \omega_0}$

On obtient deux racines égales $r_1 = r_2 = -\delta$. Dans ce cas, la solution s'écrit prend la forme suivante:

$$x(t) = (at + b)e^{-\delta t}$$

Elle correspond au régime dit ″**critique**″ dans lequel le système retourne à sa position d'équilibre le plus rapidement possible sans la dépasser, c'est à dire sans oscillation. L'amortissement critique est donné par :

$$\alpha_c = 2\sqrt{mk}$$

3 ème cas: $\Delta' < \mathbf{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{\delta < \omega_0}$

Les racines r_1 et r_2 sont, dans ce cas, complexes:

$$r_{1,2} = -\delta \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \quad \text{avec} \quad j^2 = -1$$

et la solution devient :

$$x(t) = e^{-\delta t}(Ae^{j\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}\,t} + Be^{-j\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}\,t})$$

Le terme entre parenthèses étant une combinaison de deux sinusoïdes de même fréquence, il peut lui même s'écrire sous la forme d'une sinusoïde:

$$x(t) = Ce^{-\delta t}cos(\omega_a t + \varphi)$$

avec $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ pseudo -pulsation

C'est l'expression d'une sinusoïde dont l'amplitude décroît exponentiellement avec le temps. C'est le régime oscillatoire ou ″ **pseudo- périodique**″. Il correspond à un amortissement faible.

Les trois régimes possibles sont résumés sur la figure I-2.

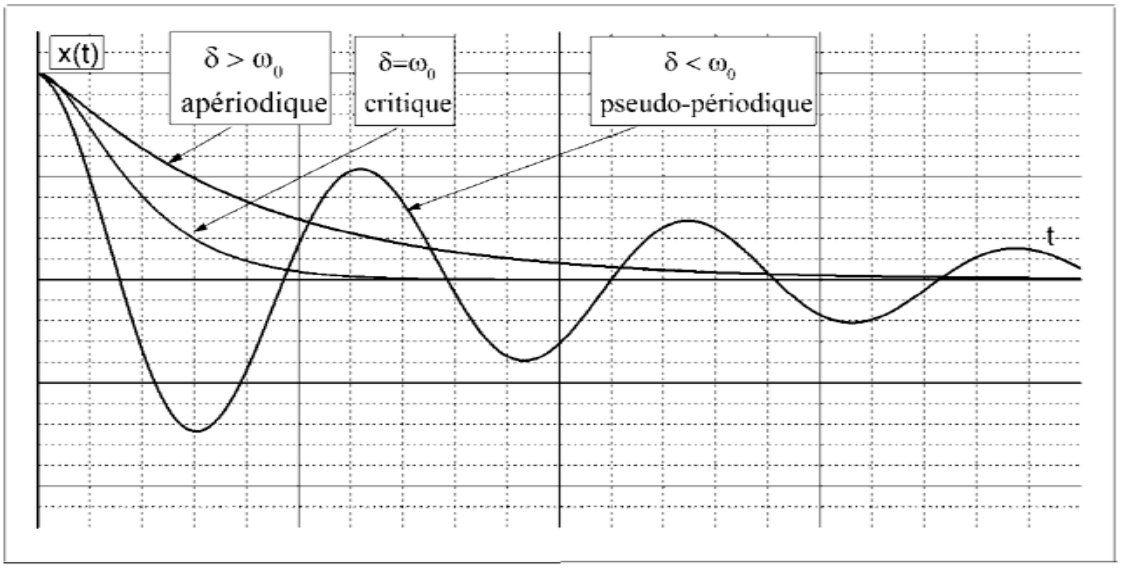


Figure I-2

2. Le régime pseudo-périodique

Si on suppose que le système est libéré sans vitesse à partir d'une élongation initiale X_0, montrer que la solution s'écrit

$$x(t) = X_0 \frac{\omega_0}{\omega_a} e^{-\delta t} cos(\omega_a t + \varphi) \qquad \text{avec} \qquad cos\,\varphi = \frac{\omega_a}{\omega_0}$$

Si l'amortissement est faible, $\delta \ll \omega_0$ et donc $\omega_a \cong \omega_0$. On a :

$$x(t) = X_0 e^{-\delta t} cos(\omega_0 t)$$

Le rapport $D = \frac{1}{n} Log \frac{x(t)}{x(t+nT)}$, où $T = \frac{2\pi}{\omega_a}$ est la période, est appelé décrément logarithmique et peut s'écrire également $D = \delta T$

Il caractérise le degré d'amortissement. Plus l'amortissement est faible et plus *D* est petit devant 2π.

Une autre grandeur permet de définir le degré d'amortissement. C'est le facteur de qualité du système. Cette grandeur, appelée *Q*, d'un usage plus général que le décrément *D*, est définie par :

$$Q = \frac{2\pi}{(1 - e^{-2\delta T})}$$

expression qui devient, dans le cas d'un amortissement faible,

$$Q = \frac{\omega_a}{2\delta} = \frac{\pi}{D}$$

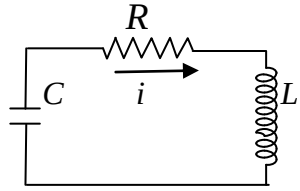
Un grand facteur de qualité signifie que le système est peu amorti.

II. Etude d'un circuit électrique oscillant

Considérons, à présent, le circuit électrique *RLC* de la figure I-3.

Le condensateur étant au préalable chargé, on ferme le circuit. L'évolution de l'intensité *i* du courant électrique est décrite par la loi d'Ohm

Figure I- 3



$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{c}\int idt = 0$$

En introduisant la charge électrique *q(t)* du condensateur, on a

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = 0$$

et, en posant $\delta = \frac{R}{2L}$ et $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$,

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

Cette équation est analogue à l'équation (1). Sa solution peut être, selon la valeur donnée à *R* (si *L* est constante), apériodique, critique ou oscillatoire. Les résultats obtenus précédemment pour le système mécanique sont également valables ici.

L'observation de la charge *q(t)* du condensateur ou, ce qui revient au même, de la tension à ses bornes $v(t) = \frac{q(t)}{C}$, qui lui est proportionnelle, nous renseignera donc sur toutes les propriétés des systèmes à un degré de liberté. Cela est d'autant plus intéressant que les circuits électriques sont beaucoup plus simples à réaliser que les systèmes mécaniques.

III. Réalisation pratique

Le dispositif étudié est un circuit *RLC* série constitué d'une résistance variable (boîtes à décades *x1000, x100, x10* Ω), d'une bobine d'induction inconnue *L* et d'un condensateur de capacité *C* dont la valeur sera donnée en séance de TP.

Le circuit est alimenté par un signal carré *e(t)* délivré par un générateur de fonctions (GBF) et de fréquence suffisamment faible devant la fréquence propre du système. Cela permet d'observer le régime libre du système. En effet, soit e_0 l'amplitude du signal carré. On a ainsi $e(t) = +e_0$ pendant une demi-période et $e(t) = -e_0$ pendant la demi-période suivante,. La charge q aux bornes du condensateur obéit alors à l'équation

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = \pm e_0$$

En posant $Q = q \pm Ce_0$, on a

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{Q}{C} = 0$$

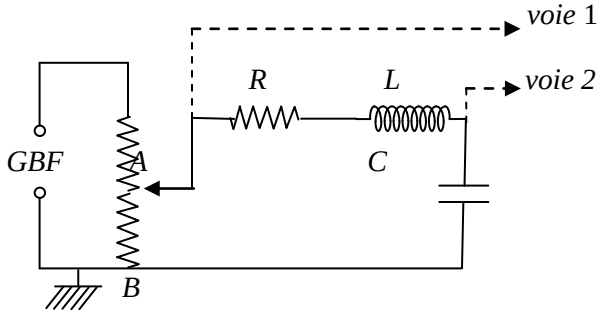
soit :

$$\ddot{Q} + 2\delta\dot{Q} + \omega_0^2 Q = 0$$

qui représente bien le mouvement libre du système. La solution *Q(t)* tendant asymptotiquement vers 0, la charge *q(t)* tendra vers la valeur ± Ce_0.

Remarque : Certains types de GBF délivrent un signal carré non alternatif, c'est à dire que *e(t)* est égal à e_0 pendant une demi-période et à *0* pendant la demi-période suivante. Les équations ci-dessus doivent donc être modifiées en conséquence.

Figure I-4



1. Dispositif expérimental (figure I-4)

Le générateur de fonctions (GBF) possédant une résistance interne non négligeable (généralement de 50 Ω) , on utilise un pont diviseur permettant d'obtenir entre les points A et B, un générateur de faible résistance interne.

Le signal V_{AB} délivré entre A et B est observé sur la voie Y_1 de l'oscilloscope.

2. Observation des différent régimes

La tension $V_C(t)$ aux bornes de C est envoyée sur la voie Y_2 de l'oscilloscope. Observer l'évolution de la forme de $V_C(t)$ quand on fait varier la résistance d'une grande à une petite valeur. Comparer la valeur asymptotique de $V_C(t)$ à la valeur prévue.

Mesurer la résistance critique R_C, valeur de R pour laquelle on obtient le régime critique, c'est-à-dire celle pour laquelle on passe du régime oscillant au régime apériodique. Une valeur précise est généralement impossible. On proposera donc la fourchette la plus étroite possible pour R_C. En déduire une valeur de l'inductance L de la bobine.

3. Le régime oscillatoire amorti

La résistance R étant fixée à zéro, l'amortissement est assuré par les autres résistances présentes dans le circuit (générateur, bobine, connexions, contacts).

Mesurer le décrément logarithmique D ainsi que la période T des oscillations avec le maximum de précision. En déduire le facteur d'amortissement δ, le facteur de qualité Q, la valeur de l'inductance L et celle de la somme des résistances présentes dans le circuit avec les incertitudes correspondantes. Comparer L à la valeur obtenue à partir de la mesure de R_C.

4. Application à la mesure de résistances et de capacités inconnues

Remplacer la résistance variable AOIP par la résistance R_X et le condensateur C par la capacité C_X. Étudier de nouveau le régime pseudo-périodique obtenu. En utilisant les résultats précédents, en déduire les valeurs de R_X et C_X avec les incertitudes correspondantes.

II-OSCILLATIONS FORCEES DES SYSTEMES A UN DEGRE DE LIBERTE

THEMES:
- Courbe de résonance
- Etude du déphasage de la réponse
- Bande passante et facteur de qualité

I. Réponse du système mécanique à une excitation extérieure

1. Régime transitoire. Régime permanent

Lorsque la masse *m* est soumise à une force extérieure *F(t)* de même direction que l'élongation *x*, l'équation (1) devient

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m} = E(t) \qquad (2)$$

On sait que la solution générale de cette forme d'équation est la superposition de la solution libre $x_T(t)$ (équation sans second membre ou homogène) et d'une solution particulière $x_P(t)$ choisie en fonction de la forme du second membre *E(t).*

La solution $x_T(t)$, déjà obtenue dans l'étude des oscillations libres, correspond au ″**régime transitoire**″. En régime pseudo-périodique, elle s'écrit

$$x(t) = X_0 \frac{\omega_0}{\omega_a} e^{-\delta t} cos(\omega_a t + \varphi)$$

avec $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ et $\cos\varphi = \frac{\omega_a}{\omega_0}$

et pour des conditions initiales telles que :

$$x_T(0) = X_0 \;\; et \;\; \dot{x}_T = 0$$

Au bout d'un temps suffisamment long (quelques δ^{-1}), x_T devient très faible et la solution générale tend vers la solution particulière $x_P(t)$. Il s'établit alors ce qui est appelé ″**régime permanent**″.

On s'intéressera au cours de cette partie au seul régime permanent, plus particulièrement dans le cas d'une excitation *E(t)* sinusoïdale de pulsation ω telle que:

$$E(t) = E_0 e^{j\omega t} = \frac{F_0}{m} e^{j\omega t}$$

2. Etude du régime permanent

Le régime permanent est alors sinusoïdal de même pulsation que l'excitation et la réponse du système s'écrit :

$$x(t) = A_0(\omega) e^{j(\omega t + \varphi)}$$

où $A_0(\omega)$ est l'amplitude qui dépend de la pulsation ω et φ le déphasage de la réponse par rapport à l'excitation.

Montrer qu'on a :

$$A_0(\omega) = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\delta\omega)^2}}$$

$$tg(\varphi) = \frac{-2\delta\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)}$$

La courbe donnant la variation de l'amplitude en fonction de ω est représentée sur la figure II-1.

L'amplitude A_0 passe par un maximum $(A_0)_{max}$ pour une pulsation $\omega = \omega_R$. C'est le phénomène de résonance. La pulsation $\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$ est la pulsation de résonance.

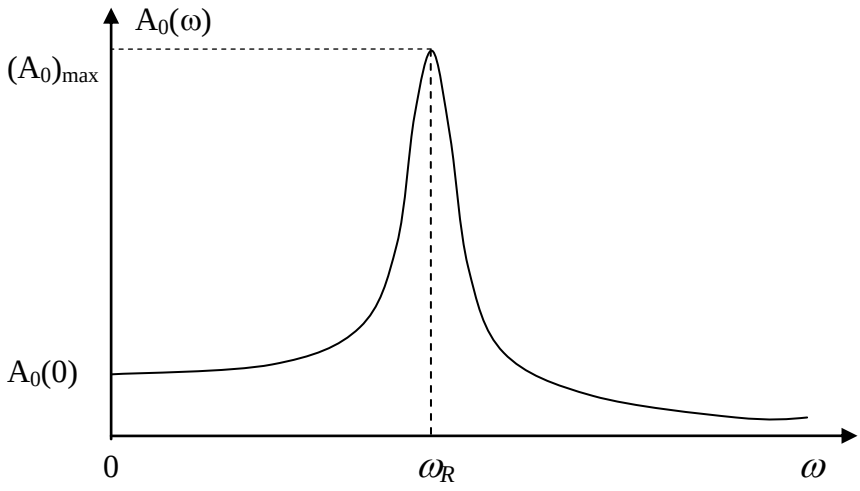


Figure II- 1

3. Acuité de la résonance. Bande passante

Le phénomène de résonance est d'autant plus prononcé que l'amortissement est faible. On peut caractériser l'acuité de la résonance par la largeur $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ où ω_1 et ω_2 sont les pulsations pour lesquelles l'amplitude de la réponse est égale à $\frac{(A_0)_{max}}{\sqrt{2}}$. C'est la largeur ou la **bande passante à *–3 dB*.**

Montrer que, lorsque l'amortissement est faible, on a les relations utiles suivantes :

$$Q = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{1}{\alpha}\sqrt{mk} = \frac{m\omega_0}{\alpha}$$

II. Etude d'un circuit RLC forcé

Les résultats précédents peuvent être appliqués au circuit électrique ci-contre (Figure II-2), dans lequel *e(t)* est un signal sinusoïdal $e_0 e^{j\omega t}$.

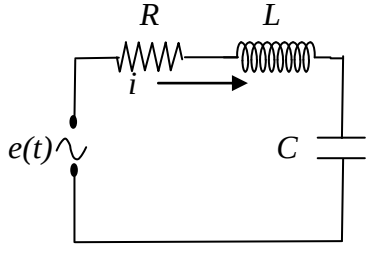


Figure II-2

L'équation différentielle décrivant l'évolution de la charge *q(t)* devient :

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = E_0 e^{j\omega t}$$

en posant : $\delta = \frac{R}{2L}$, $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ *et* $E_0 = \frac{e_0}{L}$

La réponse du circuit en régime permanent est alors donnée par

$$q(t) = Q_0(\omega) e^{j(\omega t + \varphi)}$$

où $$Q_0(\omega) = \frac{\frac{e_0}{L}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}}$$

et $$tg(\varphi) = \frac{-2\delta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

1. Etude de l'amplitude

La tension $V_c(t)$ aux bornes du condensateur et le courant *i(t)* dans le circuit auront pour amplitudes respectives:

$$V_0(\omega) = \frac{e_0 \omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}}$$

$$I_0(\omega) = \frac{e_0 \omega}{L\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}}$$

Etablir la relation : $(V_0)_{max} = e_0 \frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$ où Q est le facteur de qualité du circuit.

Montrer que, pour $\omega = \omega_0$, on a $V_0 = Q\, e_0$

Cette dernière relation signifie que lorsque la pulsation de l'excitation est égale à la pulsation propre ω_0 du circuit, la réponse aux bornes du condensateur est égale à l'excitation amplifiée d'un facteur Q. C'est pour cette raison que le coefficient Q est souvent appelé « facteur de surtension ». On peut ainsi compléter la série de relations utiles permettant la mesure de Q:

$$Q = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{V_0(\omega_0)}{e_0} = \frac{R_C}{2R}$$

Où R_c est la résistance critique (voir manipulation précédente, « oscillations libres »)

2. Etude de déphasage.

L'angle φ représente le déphasage de la réponse en tension aux bornes du condensateur (ou du déplacement pour le système mécanique) par rapport à l'excitation *e(t)*.

Il est toujours négatif, ce qui signifie que la réponse est en retard par rapport à l'excitation. On obtient la variation suivante pour le déphasage φ correspondant à un amortissement δ donné (figure II-3).

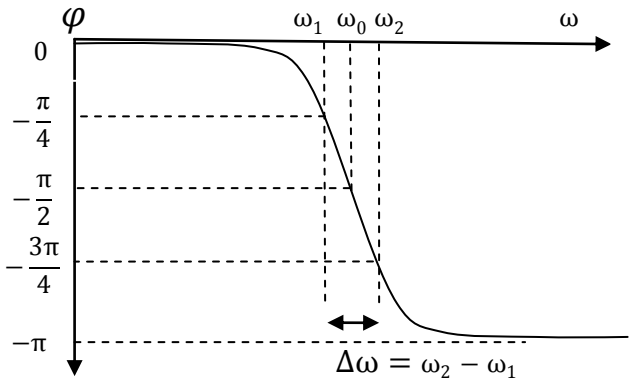


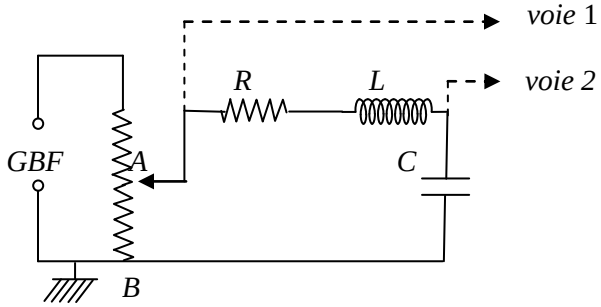
Figure II-3

Montrer que l'écart entre les deux pulsations ω_1 et ω_2 pour lesquelles φ est égal respectivement à $-\pi/4$ et $-3\pi/4$ est égal à la bande passante $\Delta\omega$.

III. Réalisation pratique

1. Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental est identique à celui qui à été utilisé dans la partie "Oscillations libres", le GBF délivrant cette fois-ci un signal sinusoïdal. La fréquence du signal peut être mesurée à l'aide d'un fréquencemètre, à l'oscilloscope ou lue directement sur l'afficheur du GBF.



2. Observation du phénomène de résonance de tension.

La résistance *R* étant fixée à *0*, le signal d'entrée *e(t)* est envoyé sur la voie Y_1 de l'oscilloscope et la tension aux bornes du condensateur *C* sur la voie Y_2. Ajuster l'amplitude de *e(t)*. Faire varier la fréquence du signal d'entrée depuis les basses fréquences jusqu'à la zone des fréquences élevées et observer simultanément la variation des amplitudes des deux signaux. Relever la fréquence de résonance F_R et comparer à la pulsation propre du circuit F_0.

Fixer *R* à *100 Ω* et effectuer les mêmes opérations. Comparer avec les observations précédentes et interpréter.

3. Etude de la réponse du système (Amplitude et phase)

On se propose de tracer les courbes donnant l'amplitude et la phase de la tension aux bornes de *C* en fonction de la fréquence du signal d'entrée, *e(t)* et cela, pour deux amortissements différents *(R=0 et R=100Ω*)

Faire varier la fréquence du signal entre *0* et $2F_0$ environ , en resserrant les intervalles au voisinage de la résonance. Relever à l'oscilloscope l'amplitude de la réponse aux bornes de *C* ainsi que son déphasage par rapport à *e(t).* Veiller à ce que l'amplitude du signal d'entrée *e(t)* reste constante en la réajustant si nécessaire.

Remarque: Pour la mesure simultanée du déphasage et de l'amplitude, il sera plus pratique d'utiliser le décalage entre les deux sinusoïdes $V_c(t)$ et *e(t)* plutôt que la méthode de l'ellipse. Le principe de ces deux méthodes de mesure a été donné en manipulation d'introduction.

Tracer sur le même repère, en fonction de la fréquence, les variations de l'amplitude de $V_c(t)$ [ou de $\frac{v_c(t)}{e_0}$] obtenues pour *R=0* et *R=100Ω.*

Tracer sur un autre repère, en fonction de la fréquence, les variations du déphasage φ obtenues pour *R=0* et *R=100Ω.*

4.Etude de l'acuité de la résonance

Calculer, à partir des courbes d'amplitude et de déphasage, la bande passante à *-3 dB* pour chacune des deux résistances et en déduire les facteurs de qualité correspondants.

Comparer avec les valeurs obtenues à l'aide des autres expressions donnant le facteur de qualité, y compris celles utilisant les oscillations libres. Discuter les différents résultats.

5. Application à la mesure d'une résistance et d'une capacité inconnue.

Remplacer la résistance AOIP par la résistance R_x et le condensateur *C* par le condensateur C_x. Utiliser les résultats précédents pour déterminer la valeur de R_x et C_x en estimant les incertitudes correspondantes.

III-OSCILLATIONS LIBRES DES SYSTEMES A DEUX DEGRES DE LIBERTE

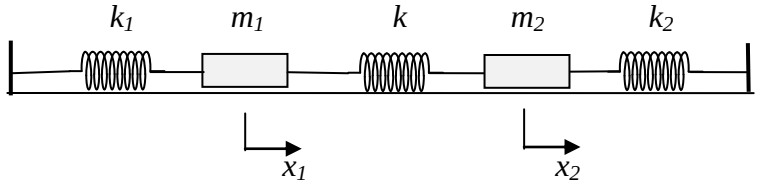
THEMES:
- Systèmes symétriques couplés.
- Observation des battements.
- Observation des modes propres.
- Mesures des fréquences propres.
- Mesure du coefficient de couplage.

I . Etude d'un système mécanique à deux degrés de liberté:

1. Les pulsations propres.

Soit le système mécanique représenté sur la figure III-1 et composé de deux oscillateurs harmoniques (m_1, k_1) et (m_2, k_2) couplés par un ressort de constante de raideur k. Les deux masses sont supposées se déplacer sans frottement sur un plan horizontal et leurs élongations par rapport à leurs positions d'équilibre sont repérées par x_1 et x_2.

Figure III-1



Lorsque ce système est écarté de sa position d'équilibre puis abandonné à lui même, il effectue un mouvement vibratoire libre. Les équations décrivant la variation des élongations x_1 et x_2 en fonction du temps, s'écrivent comme suit:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x_1} + k_1x_1 + k(x_1 - x_2) = 0 \\ m_2\ddot{x_2} + k_2x_2 + k(x_2 - x_1) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Les solutions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont des combinaisons linéaires des deux modes propres $X_1(t)$ et $X_2(t)$, harmoniques de pulsations propres Ω_1 et Ω_2. Ces dernières sont les racines de l'équation suivante:

$$m_1m_2\Omega^4 - \Omega^2[m_2(k_1 + k) + m_1(k_2 + k)] + (k_1 + k)(k_2 + k) - k^2 = 0$$

En posant :

$$\omega_1^2 = \frac{(k_1+k)}{m_1},\ \omega_2^2 = \frac{(k_2+k)}{m_2} \text{ et } K^2 = \frac{k^2}{(k_1+k)(k_2+k)}$$

l'équation aux pulsations propres se met sous la forme :

$$\Omega^4 - \Omega^2(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \omega_1^2\omega_2^2(1 - K^2) = 0$$

et ses racines sont données par :

$$\begin{cases} \Omega_1^2 = \frac{1}{2}[(\omega_1^2 + \omega_2^2) - \sqrt{(\omega_2^2 - \omega_1^2)^2 + 4K^2\omega_1^2\omega_2^2}] \\ \Omega_2^2 = \frac{1}{2}[(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \sqrt{(\omega_2^2 - \omega_1^2)^2 + 4K^2\omega_1^2\omega_2^2}] \end{cases} \quad (2)$$

Le nombre *K*, compris entre 0 et 1, est appelé coefficient de couplage entre les deux oscillateurs.

Dans le cas d'un système symétrique ($m_1 = m_2 = m$, $k_1 = k_2$), les relations (2) deviennent

$$\Omega_1^2 = \omega^2(1 - \mathrm{K}) \text{ et } \Omega_2^2 = \omega^2(1 + \mathrm{K}) \qquad (3)$$

avec $\omega^2 = \frac{(k_1+k)}{m_1} = \frac{(k_2+k)}{m_2}$ *et* $K = \frac{k}{k_1+k} = \frac{k}{k_2+k}$

En déduire les expressions des pulsations propres suivantes :

$$\Omega_1^2 = \omega_0^2 \text{ et } \Omega_2^2 = \omega_0^2 \frac{(1+K)}{(1-K)}$$

Avec $\omega_0^2 = \frac{k_1}{m_1} = \frac{k_2}{m_2}$ (ω_0 = pulsation propre de chacun des deux oscillateurs harmoniques seul)

La figure III-2 représente la variation des pulsations propres en fonction du coefficient de couplage *K* dans le cas d'un système symétrique.

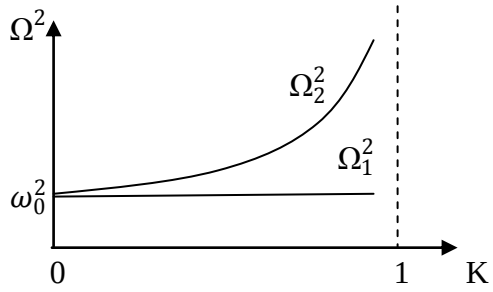


Figure III-2

2. Le phénomène de battements.

Les solutions générales sont alors données par:

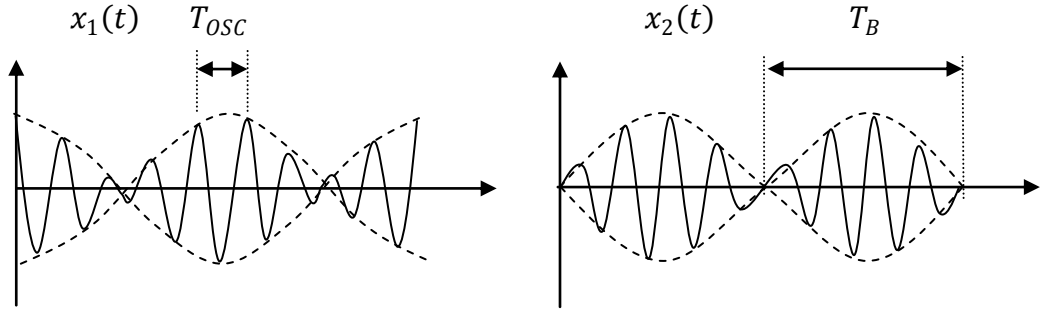
$$x_1(t) = A_1\, cos(\Omega_1 t + \varphi_1) + A_2\, cos(\Omega_2 t + \varphi_2)$$
$$x_2(t) = A_1\, cos(\Omega_1 t + \varphi_1) - A_2\, cos(\Omega_2 t + \varphi_2)$$

Pour des conditions initiales bien choisies, on peut écrire :

$$\begin{cases} \mathrm{x_1(t) = A_1(\cos\Omega_1 t + \cos\Omega_2 t) = 2A\cos(\frac{\Omega_2-\Omega_1}{2}t)\cos(\frac{\Omega_2+\Omega_1}{2}t)} \\ \mathrm{x_2(t) = A_1(\cos\Omega_1 t - \cos\Omega_2 t) = 2A\sin(\frac{\Omega_2-\Omega_1}{2}t)\sin(\frac{\Omega_2+\Omega_1}{2}t)} \end{cases} \qquad (4)$$

On observe ainsi deux sinusoïdes de pulsation égale à $\frac{\Omega_2+\Omega_1}{2}$, en quadrature de phase, modulées par deux sinusoïdes de pulsation égale à $\frac{\Omega_2-\Omega_1}{2}$, également en quadrature de phase. C'est le phénomène de battements (figure III-3). La mesure des périodes de battements T_B et d'oscillation T_{0SC} permet d'accéder aux pulsations propres du système puis au coefficient de couplage K.

Figure III-3



On se propose au cours de cette manipulation de mesurer les pulsations propres et le coefficient de couplage par l'observation des battements et des modes propres d'un système électrique (circuits RLC couplés par capacité). Cela sera éventuellement complété par des mesures analogues sur un système mécanique à deux degrés de liberté (pendules simples couplés par ressort).

II. Etude de deux circuits électriques couplés

Les équations régissant les courants i_1 et i_2 des circuits couplés représentés sur la figure III-4 s'écrivent comme suit:

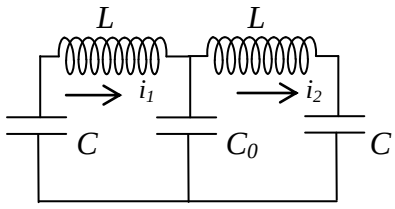


Figure III-4

$$\begin{cases} L_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C_1}\int i_1 dt + \frac{1}{C_0}\int (i_1 - i_2)dt = 0 \\ L_2 \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C_2}\int i_2 dt + \frac{1}{C_0}\int (i_2 - i_1)dt = 0 \end{cases} \quad (5)$$

ou bien, en introduisant les charges électriques $q_1(t)$ et $q_2(t)$,

$$\begin{cases} L_1 \ddot{q_1} + \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_1 - q_2}{C_0} = 0 \\ L_2 \ddot{q_2} + \frac{q_2}{C_2} + \frac{q_2 - q_1}{C_0} = 0 \end{cases} \quad (6)$$

On obtient donc un système analogue au système (1). Les solutions $q_1(t)$ et $q_2(t)$ seront de la même forme que $x_1(t)$ et $x_2(t)$. Pour étudier les battements de x_1 et x_2, il suffit alors d'observer ceux des tensions aux bornes des capacités C_1 et C_2, tensions proportionnelles à q_1 et q_2.

III. Les modes propres.

Le système d'équations couplées (6) peut être mis, dans le cas symétrique ($L_1=L_2=L$ et $C_1=C_2=C$), sous la forme découlée suivante:

$$\begin{cases} \ddot{Q_1} + \Omega_1^2 Q_1 = 0 \quad avec \quad \Omega_1^2 = \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \\ \ddot{Q_2} + \Omega_2^2 Q_2 = 0 \quad avec \quad \Omega_2^2 = \omega_0^2 (1 + 2\frac{C}{C_0}) \end{cases} \quad (7)$$

où on a posé $Q_1 = q_1 + q_2$ et $Q_2 = q_1 - q_2$.

Les solutions (harmoniques) de ce système sont les modes propres

$$Q_1(t) = A_1 e^{j(\Omega_1 t + \varphi_1)} \quad \text{et} \quad Q_2(t) = A_2 e^{j(\Omega_2 t + \varphi_2)}$$

Les grandeurs A_1, A_2, φ_1 et φ_2 sont des constantes d'intégration dépendant des conditions initiales.

Les charges $q_1(t)$ et $q_2(t)$ se déduisent alors sans peine:

$$q_1(t) = \frac{1}{2}[Q_1(t) + Q_2(t)] = \frac{A_1}{2} e^{j(\Omega_1 t + \varphi_1)} + \frac{A_2}{2} e^{j(\Omega_2 t + \varphi_2)}$$

$$q_2(t) = \frac{1}{2}[Q_1(t) - Q_2(t)] = \frac{A_1}{2} e^{j(\Omega_1 t + \varphi_1)} - \frac{A_2}{2} e^{j(\Omega_2 t + \varphi_2)}$$

Si on observe des tensions proportionnelles à q_1+q_2 et $q_1- q_2$, on mettra en évidence, les vibrations sinusoïdales correspondant aux deux modes propres. La mesure de leurs périodes respectives T_1 et T_2 permettra alors de déduire les pulsations propres de système : $\Omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$ et $\Omega_2 = \frac{2\pi}{T_2}$

III. Réalisation pratique

On utilise le montage représenté sur la figure III-5. Comme dans le cas de l'oscillateur à un degré de liberté, l'élongation initiale est apportée par un signal carré *e(t)* de période relativement grande devant celles des oscillations propres du circuit (cf TP n° 1). Dans ce cas, bien que le régime soit forcé, les oscillations peuvent être alors considérées comme libres sur chaque demi-période du signal carré.

En effet, le système (6) s'écrit alors, pour un signal carré alterné $\pm e_0$

$$\begin{cases} L_1\ddot{q_1} + \frac{q_1}{C} + \frac{q_1-q_2}{C_0} = \pm e_0 \\ L_2\ddot{q_2} + \frac{q_2}{C} + \frac{q_2-q_1}{C_0} = 0 \end{cases} \qquad (8)$$

En effectuant le changement de variables

$$q_1 = p_1 + a_1 \qquad et \qquad q_2 = p_2 + a_2$$

où a_1 et a_2 sont des constantes, on obtient le système suivent:

$$\begin{cases} L_1\ddot{p_1} + \frac{p_1}{C} + \frac{p_1-p_2}{C_0} = 0 \\ L_2\ddot{p_2} + \frac{p_2}{C} + \frac{p_2-p_1}{C_0} = 0 \end{cases} \qquad (9)$$

dont les solutions $p_1(t)$ et $p_2(t)$ sont celles du régime libre, telles qu'exprimées par les équations (4) et représentées sur la figure III-3.

Les charges observées, $q_1(t)$ et $q_2(t)$, se déduisent de $p_1(t)$ et de $p_2(t)$ par un décalage égal à a_1 et a_2 respectivement. Pour chaque demi-période du signal carré donc, les oscillations s'effectuent autour de la valeur a_1 pour $q_1(t)$ et a_2 pour $q_2(t)$.

Montrer que les tensions $V_1(t) = \frac{1}{C}q_1(t)$ et $V_2(t) = \frac{1}{C}q_2(t)$ oscillent autour de leurs valeurs moyennes respectives $\pm e_0 \frac{1}{1+K}$ et $\pm e_0 \frac{K}{1+K}$ et qu'il est possible de déduire la valeur du coefficient de couplage par simple comparaison de ces dernières.

La valeur de C_0 est donnée en séance de TP. On utilisera pour L les deux bobines disponibles sur les tables. Comme pour les manipulations précédentes, le signal *e(t)* est délivré par un GBF à travers un diviseur de tension.

1. Etude des battements:

a . Observation

On choisira la fréquence du signal d'entrée suffisamment faible devant les fréquences propres (dans ce cas de 100 à 200 Hz) afin d'obtenir plusieurs oscillations de battement sur l'écran de l'oscilloscope.

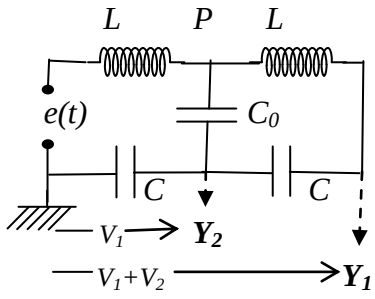


Figure III-5

Le GBF et l'oscilloscope ayant des masses électriques communes, il n'est pas possible d'observer simultanément les tensions $V_1(t) = \frac{q_1(t)}{C}$ *et* $V_2(t) = \frac{q_2(t)}{C}$. Le montage proposé permettant d'observer les tensions $V_1(t)$ sur la voie Y_2 et $V_1(t) + V_2(t)$ sur la voie Y_1 , on peut, en utilisant les fonctions inversion de la voie 2, "INV Y_2" ou (- Y_2) et addition ADD ou (Y_1+Y_2) de l'oscilloscope, obtenir les signaux $V_2(t)$ (voie 1 moins voie 2) et $V_1(t)$ (directement sur la voie 2) successivement sans modification de connexions.

- Observer, de cette manière, les signaux V_1 et V_2 et comparer avec les prévisions théoriques (allures, déphasage, etc…). Pour l'observation correcte de V_2, il est nécessaire que les calibres des voies 1 et 2 soient les mêmes.

b. Mesures à effectuer:

- Mesurer les périodes des oscillations T_0 et des battements T_B. En déduire les valeurs des fréquences propres F_1 et F_2 puis celles du coefficient de couplage K et de la fréquence propre F_0 des oscillateurs découplés.
- Effectuer une mesure directe de la fréquence propre F_0 (voir manipulations sur les systèmes à un degré de liberté) et comparer à la valeur calculée précédemment.
- Mesurer les valeurs moyennes autour desquelles oscillent $V_1(t)$ et $V_2(t)$. En déduire la valeur du coefficient de couplage K.

2. Etude des modes propres:

La tension adressée sur la voie 1 de l'oscilloscope est, comme signalé précédemment, proportionnelle au premier mode propre q_1+q_2 dont l'observation ne soulève aucune difficulté.

- Comparer l'allure de l'oscillation observée avec les prévisions. Mesurer sa période T_1 à l'aide de l'oscilloscope.

On relie ensuite le point P à l'entrée Y_1 de l'oscilloscope. La tension observée sur cette voie est ainsi la somme $V_0 + V_1$ des tensions V_0 aux bornes de C_0 et V_1 aux bornes du condensateur de la première maille. La tension V_0 étant égale à $\frac{q_1-q_2}{C_0}$, l'opération « voie 1 moins voie 2 » permet l'observation de V_0, tension proportionnelle au deuxième mode propre q_1-q_2.

- Observer celui-ci et comparer son allure avec les prévisions. Mesurer sa période T_2 à l'aide de l'oscilloscope.
- Déduire de ces mesures le coefficient de couplage *K* du système.

3. <u>Comparaison entre les différentes méthodes</u>:

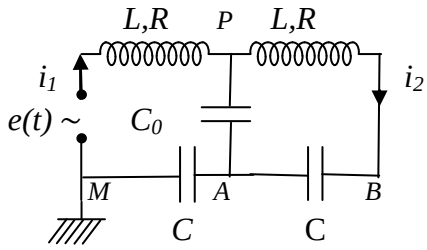
- Calculer la valeur théorique du coefficient de couplage *K* en utilisant les valeurs données pour les capacités *C* et C_0.
- Dresser un tableau comparatif résumant les résultats obtenus par les différentes méthodes (valeur théorique, battements, valeurs moyennes, modes propres) et discuter.

IV-OSCILLATIONS FORCEES DES SYSTEMES A DEUX DEGRES DE LIBERTE

THEMES: -Réponse à une excitation sinusoïdale
-Résonance et antirésonance
-Influence du couplage sur les fréquences propres

I. Etude de la réponse à une excitation extérieure sinusoÏdale:

On considère les circuits couplés symétriques de la figure III-5 alimentés à présent par une source de tension sinusoïdale $e(t) = e_0 e^{j\omega t}$.



C_0 étant la capacité du condensateur de couplage, le coefficient K de couplage entre les deux mailles est donné par (voir étude des oscillations libres):

$K = \frac{C}{C_0 + C}$ dont on déduit $\frac{C}{C_0} = \frac{1-K}{K}$

Montrer que les tensions $V_1(t)$ et $V_2(t)$ aux bornes des condensateurs de la première et de la seconde maille respectivement, sont régies par les équations suivantes:

$$\begin{cases} \ddot{v_1} + 2\delta\dot{v_1} + \omega_0^2 \frac{1}{1-K} v_1 - \omega_0^2 \frac{K}{1-K} v_2 = \omega_0^2 e_0 e^{j\omega t} \\ \ddot{v_2} + 2\delta\dot{v_2} + \omega_0^2 \frac{1}{1-K} v_2 - \omega_0^2 \frac{K}{1-K} v_1 = 0 \end{cases}$$

dans lesquelles on a posé $\delta = \frac{R}{2L}$ *et* $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$

On peut également étudier les oscillations du système à partir des courants de mailles $i_1(t)$ et $i_2(t)$ qui, par intégration, donneront les charges $q_1(t)$ et $q_2(t)$ et donc les tensions $v_1(t)$ et $v_2(t)$ cherchées.

Si on pose $Z = R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})$, impédance de chacune des mailles découplées, montrer qu'on a:

$$i_1 + i_2 = \frac{e}{Z} \quad \text{et}$$

$$i_1 - i_2 = jZC_0\omega i_2$$

Les solutions de ce système sont les suivantes :

$$i_1 = \frac{1 + jZC_0\omega}{Z(2 + jZC_0\omega)} e(t)$$

$$i_2 = \frac{1}{Z(2 + jZC_0\omega)} e(t)$$

On en déduit :

$$v_1(t) = \frac{\frac{K}{1-K}+[(1-x^2)+2j\beta x)]}{[(1-x^2)+2j\beta x][\frac{2K}{1-K}+(1-x^2)+2j\beta x]} e(t)$$

$$v_2(t) = \frac{\frac{K}{1-K}}{[(1-x^2)+2j\beta x][\frac{2K}{1-K}+(1-x^2)+2j\beta x]} e(t)$$

en ayant posé: $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ et $\beta = \frac{\delta}{\omega_0}$

Montrer que les amplitudes de $v_1(t)$ et $v_2(t)$ tendent respectivement vers $e_0 \frac{1}{1+K}$ et $e_0 \frac{K}{1+K}$ quand ω ten vers 0.

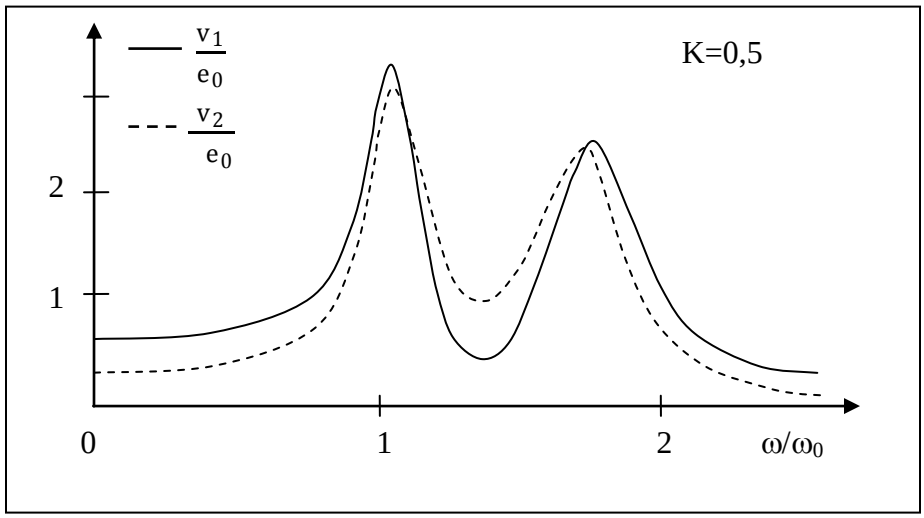


Figure IV-1

La figure IV-1 présente, à titre d'exemple, la variation des amplitudes relatives $\frac{v_1}{e_0}$ et $\frac{v_2}{e_0}$ en fonction de $x = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f}{f_0}$ pour un système symétrique et un coefficient de couplage *K= 0,5*. On y observe la présence de deux résonances pour chacune des amplitudes. La position de ces deux résonances dépend, bien entendu, du coefficient de couplage mais aussi du degré d'amortissement β. On constate cependant que, pour des amortissements faibles, les résonances se produisent pour des fréquences $f = F_1 = \frac{\Omega_1}{2\pi}$ et $f = F_2 = \frac{\Omega_2}{2\pi}$ fréquences propres du système. Ainsi, pour *K = 0,5*, on a $F_1 = F_0$ et $F_2 = F_0\sqrt{3}$ (voir étude des oscillations libres). On observe bien sur la figure IV-1 que les deux résonances se produisent pour des valeurs de ω/ω_0 très proches de 1 et de $\sqrt{3}$.

On constate également que pour une certaine fréquence comprise entre F_1 et F_2, l'amplitude de $v_1(t)$ devient très petite (d'autant plus petite que l'amortissement est faible). Ainsi, en excitant le système sur cette pulsation dite d'antirésonance, les oscillations de la première maille sont considérablement atténuées. Ce phénomène constitue le principe de l'atténuateur de vibrations.

Montrer que, dans le cas de très faibles amortissements ($\delta \ll \omega_0$), la fréquence F_{min} pour laquelle on obtient l'atténuation de la vibration du premier degré de liberté est donnée par : $F_{min}^2 = F_0^2 \frac{1}{1-K}$

Dans une première partie, il s'agira d'observer à l'oscilloscope l'évolution des tensions $v_1(t)$ et $v_2(t)$, en fonction de la fréquence d'excitation $f = \frac{\omega}{2\pi}$ puis tracer les deux courbes de réponse donnant la variation de leurs amplitudes en fonction de f, cela pour un coefficient de couplage donné. On mettra ainsi en évidence les phénomènes de résonance et d'atténuation de la vibration.

Au cours de la deuxième partie, on mettra à profit ce phénomène de résonance et les propriétés qui ont été mises en évidence pour étudier la variation des fréquences propres du système en fonction du coefficient de couplage.

II. Réalisation pratique

On reprendra le dispositif expérimental utilisé pour les oscillations libres, le GBF délivrant cette fois-ci une tension sinusoïdale de fréquence variable et d'amplitude maintenue constante durant toute la manipulation. Les tensions $v_1(t)$ et $v_2(t)$ sont observées selon la technique déjà employée (utilisation des fonctions Y_1+Y_2 et $-Y_2$ de l'oscilloscope). Les valeurs de C et C_0 sont données en séance de TP.

Observer sur une des deux voies de l'oscilloscope le signal $e(t)$. Régler et noter son amplitude e_0

Première partie - Etude des courbes de réponse en tension

1. Observation des réponses $v_1(t)$ et $v_2(t)$:

Connecter l'oscilloscope de telle sorte qu'il soit possible de visualiser alternativement les tensions $v_1(t)$ et $v_2(t)$. Faire varier sur une large gamme la fréquence f du signal d'entrée $e(t)$ en observant la forme de v_1 et v_2. En particulier, mettre en évidence les deux résonances et l'antirésonance de v_1. Mesurer les fréquences et les amplitudes à la résonance.

2. Tracé des courbes de réponse

Le tracé doit être effectué en même temps que les mesures. Les valeurs maximales des amplitudes ayant été mesurées précédemment, l'échelle verticale en v/e_0 peut donc être définie au préalable. Par ailleurs, on fera varier la fréquence f à partir de 0 environ jusque vers $3F_0$. (Rappel: F_0 représente la fréquence propre de chacune des deux mailles découplées). L'échelle horizontale en fréquence peut donc également être définie à l'avance.

Le voisinage des résonances doit être étudié avec soin : il sera nécessaire de resserrer les intervalles des fréquences entre les points de mesures pour bien rendre compte des pics. Chaque courbe devrait comporter une quinzaine de points environ.

- Relever et porter sur le graphe, pour chaque valeur de la fréquence *f*, les amplitudes de $\frac{v_1}{e_0}$ et de $\frac{v_2}{e_0}$.

3. Comparaison avec les prévisions:

- Déduire, à partir du graphe, la valeur des fréquences de résonance F_1 et F_2 ainsi que $F_{\min}$, fréquence d'antirésonance de l'oscillation $v_1(t)$ puis estimer les valeurs limites des amplitudes quand f tend vers *0*. Calculer le coefficient de couplage en utilisant les différentes relations introduites dans la partie théorique .
- Calculer la valeur théorique de ces mêmes grandeurs à partir des éléments du circuit.
- Comparer les deux ensembles de valeurs.
- Comparer également avec les valeurs de F_1, F_2 et *K* obtenues à partir de l'étude des oscillations libres.

Deuxième partie - Influence du couplage sur les fréquences propres

Les résultats obtenus au cours de la partie précédente ont permis de montrer qu'un système forcé à deux degrés de liberté entre en résonance chaque fois que la fréquence de l'excitation extérieure est égale (ou très proche) d'une des deux fréquences propres du système.

On se propose dans cette partie d'utiliser ce phénomène de résonance pour mesurer les fréquences propres F_1 et F_2 d'un système à deux degrés de liberté dont on fait varier le coefficient de couplage *K*. Le but est l'étude de l'évolution de F_1 et F_2 en fonction de *K*, évolution dont l'approche théorique a déjà été exposée dans l'introduction aux oscillations libres.

On conserve le dispositif expérimental précédent avec la possibilité supplémentaire de modifier la capacité C_0 à l'aide de divers condensateurs (*0.22 μF, 10 nF,…*) qu'on associera en série ou en parallèle. On obtient ainsi différentes valeurs du coefficient de couplage

- Pour chacune de ces valeurs de *K*, on déterminera les deux fréquences de résonance F_1 et F_2
- Tracer sur le même repère les graphes de F_1 et F_2 en fonction de *K*. Comparer avec les prévisions théoriques et discuter.

TRAVAUX PRATIQUES DE VIBRATIONS ET ONDES

TABLE DES MATIERES

MANIPULATION 0	INTRODUCTION AUX TRAVAUX PRATIQUES	1
MANIPULATION I	OSCILLATIONS LIBRES DES SYSTEMES A UN DEGRE DE LIBERTE	13
MANIPULATION II	OSCILLATIONS FORCEES DES SYSTEMES A UN DEGRE DE LIBERTE	19
MANIPULATION III	OSCILLATIONS LIBRES DES SYSTEMES A DEUX DEGRES DE LIBERTE	25
MANIPULATION IV	OSCILLATIONS FORCEES DES SYSTEMES A DEUX DEGRES DE LIBERTE	31